

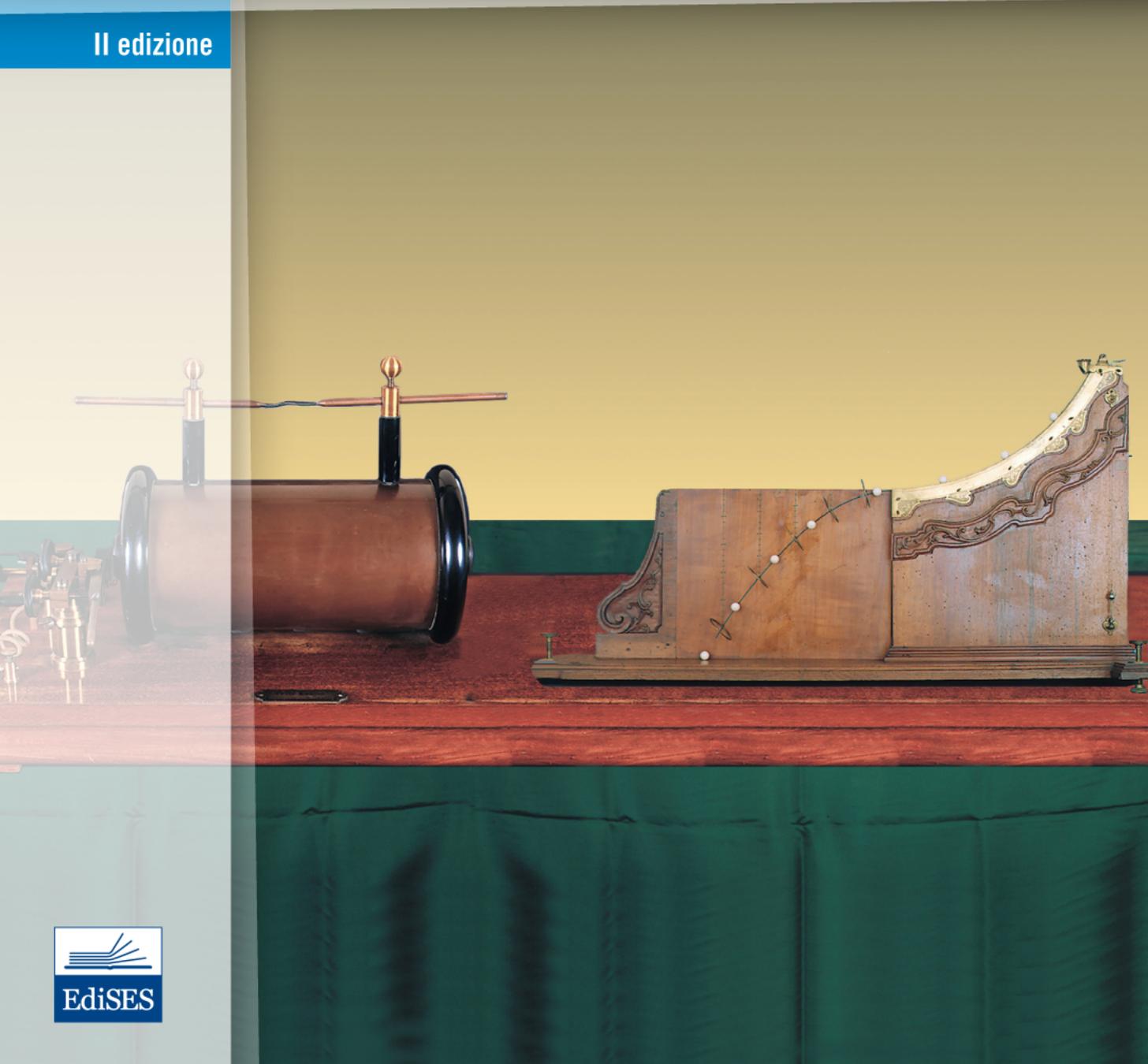
P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci



Fisica

Volume I

II edizione



P. Mazzoldi

M. Nigro

C. Voci

Dipartimento di Fisica – Galileo Galilei – Padova

FISICA

Vol. I

MECCANICA – TERMODINAMICA

SECONDA EDIZIONE

EdiSES

P. Mazzoldi - M. Nigro - C. Voci
FISICA – Vol. I Seconda edizione
Copyright © 1991, 1998, EdiSES s.r.l.

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

2002 2001 2000 1999 1998

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata

/

A norma di legge, le pagine di questo volume non possono essere fotocopiate o ciclostilate o comunque riprodotte con alcun mezzo meccanico. La casa editrice sarebbe particolarmente spiacente di dover promuovere, a sua tutela, azioni legali verso coloro che arbitrariamente non si adeguano a tale norma.

L'Editore

Fotocomposizione: EdiSES s.r.l. - Napoli
Fotoincisione: Centro DMS - Napoli

Stampato presso la
EdiSES - Napoli Via Nuova San Rocco 62/A - P.co Soleado
Tel. 081/7441706-07 Fax 081/7441705

ISBN 88 7959 137 1

Prefazione alla seconda edizione

Nel 1991, all'uscita del primo volume di questo corso di Fisica Generale, presentavamo così il lavoro.

Questo testo ha origine dalla nostra esperienza didattica maturata in anni di insegnamento dei corsi di Fisica Generale presso la Facoltà di Ingegneria dell'Università di Padova. Anche se validissimi testi sono disponibili siamo indotti ad aggiungere un contributo all'insegnamento della Fisica Generale dall'esame della realtà universitaria di questi ultimi anni.

L'ordinamento delle lezioni è diventato semestrale per la maggior parte dei corsi di laurea di materie scientifiche, con la conseguente limitazione di orario a circa 130 ore tra corso di teoria ed esercizi, quasi sempre irraggiungibili a causa di assemblee, elezioni ed altri eventi vari.

Così, accanto all'innegabile vantaggio di poter tenere il corso di Fisica Generale dopo il corso di Analisi Matematica, ci si trova però nella necessità di uno svolgimento contratto e senza pause del programma, con tutte le difficoltà che ciò comporta per un adeguato apprendimento.

Il numero di studenti, soprattutto nei corsi di laurea in Ingegneria, è aumentato spesso oltre la capacità di ricezione delle strutture universitarie e la preparazione fisico-matematica di questi studenti è molto varia e purtroppo sovente superficiale o troppo settoriale.

D'altra parte i programmi, pur essendo stati sfrondatai di nozioni accessorie, nella sostanza sono rimasti gli stessi, le esercitazioni numeriche hanno acquistato maggior spazio e importanza e la trattazione dei vari argomenti è stata mantenuta in generale ad un livello adeguato.

Una conseguenza di questi fatti è che l'impatto degli studenti con corsi affollati, ritmi di apprendimento sostenuti e difficoltà intrinseche delle materie provoca un allungamento dei tempi di superamento degli esami, se non addirittura l'abbandono degli studi.

Ci siamo pertanto proposti di aiutare lo studente a superare qualcuno dei problemi sopra accennati fornendogli uno strumento di studio che innanzi tutto indichi con chiarezza le nozioni fondamentali e sia realmente di guida alla comprensione ed alla risoluzione degli esercizi. Abbiamo però mantenuto nel testo tutti gli argomenti tradizionali, che formano la base culturale della Fisica Generale e sono di naturale riferimento per molti corsi successivi, anche se non è possibile svolgerli nella loro completezza in un solo semestre.

Dopo varie ristampe con minime modifiche e inevitabili correzioni appare adesso la seconda edizione. Le principali differenze riguardano il cambiamento dell'ordine di presentazione di alcuni argomenti, l'aumento del numero degli esempi svolti nel testo e dei problemi proposti, l'aggiunta di paragrafi introduttivi che mettono in evidenza lo sviluppo logico del programma.

La parte iniziale, dedicata alla meccanica del punto (capitoli 1, 2, 3), è piuttosto estesa in quanto abbiamo ritenuto molto importante discutere a fondo il modo di procedere e il legame con l'Analisi. Nel capitolo 3 sono state ampliate le nozioni di teoria della relatività. La meccanica dei sistemi di punti (capitolo 4) completa gli argomenti di carattere generale. Ad essa segue l'esposizione della teoria newtoniana della gravitazione (capitolo 5), della meccanica del corpo rigido (capitolo 6) trattata in modo esteso e con numerosi esempi, e di elementi di elasticità e meccanica dei fluidi (capitoli 7 e 8). Infine nel capitolo 9 sono raccolti gli argo-

menti riguardanti i moti oscillatori e vengono introdotte le onde elastiche. Il materiale presentato nei capitoli 5, 7, 8, 9 è più vasto di quello che normalmente si riesce a svolgere in un corso del primo anno, ma a nostro avviso le parti essenziali non dovrebbero essere trascurate.

La termodinamica è trattata nei capitoli finali (10, 11, 12, 13) in modo classico, senza riferimento a concetti di meccanica statistica. Nel capitolo 10 vengono introdotti i concetti di temperatura e calore e si discute il primo principio. Il capitolo 11 contiene le applicazioni relative ai gas e comprende argomenti di teoria cinetica. Al secondo principio e all'entropia è dedicato il capitolo 12 e l'ultimo capitolo riguarda i potenziali termodinamici e le proprietà generali dei sistemi p , V , T . La materia esposta è abbastanza vasta, ma è organizzata in modo tale da poter estrarre facilmente un solido programma di minima, se a ciò si fosse costretti da restrizioni temporali.

Ringraziamo tutti i colleghi che ci hanno suggerito modifiche e segnalato errori. Concludiamo con lo stesso auspicio della prima edizione.

Speriamo di aver lavorato utilmente nell'interesse degli studenti. Saremmo soddisfatti se durante lo studio lo studente acquistasse interesse per la materia e, raggiunto lo scopo primario di superare l'esame, fosse consapevole dell'importanza della Fisica Generale per i suoi studi successivi e la sua formazione culturale.

Paolo Mazzoldi, Massimo Nigro, Cesare Voci

Indice generale

Capitolo 1	Cinematica del punto	5	Capitolo 3	Moti relativi	90
1.1	Introduzione	5	3.1	Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative	90
1.2	Moto rettilineo	6	3.2	Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana	95
1.3	Velocità nel moto rettilineo	6	3.3	Moto di trascinamento rettilineo uniforme	96
1.4	Accelerazione nel moto rettilineo	10	3.4	Moto di trascinamento rettilineo accelerato	99
1.5	Moto verticale di un corpo	16	3.5	Moto di trascinamento rotatorio uniforme	102
1.6	Moto armonico semplice	18	3.6	Il moto rispetto alla terra	104
1.7	Moto rettilineo smorzato esponenzialmente	21	3.7	Commenti e note	106
1.8	Paradosso di Zenone	22	3.8	Teoria della relatività. Trasformazioni di Lorentz	109
1.9	Moto nel piano. Posizione e velocità	23	3.9	Quantità di moto ed energia relativistiche	118
1.10	Accelerazione nel moto piano	25			
1.11	Moto circolare	28			
1.12	Moto parabolico dei corpi	32			
1.13	Moto nello spazio. Composizione di moti	35			
1.14	Riepilogo	36			
Capitolo 2	Dinamica del punto	39	Capitolo 4	Dinamica dei sistemi di punti materiali	129
2.1	Principio d'inerzia. Introduzione al concetto di forza	39	4.1	Sistemi di punti. Forze interne e forze esterne	129
2.2	Leggi di Newton	40	4.2	Centro di massa di un sistema di punti. Teorema del moto del centro di massa	131
2.3	Quantità di moto. Impulso	42	4.3	Conservazione della quantità di moto	134
2.4	Risultante delle forze. Equilibrio. Reazioni vincolari	44	4.4	Teorema del momento angolare	137
2.5	Classificazione delle forze	46	4.5	Conservazione del momento angolare	139
2.6	Azione dinamica delle forze	46	4.6	Sistema di riferimento del centro di massa	140
2.7	Forza peso	48	4.7	Teoremi di König	141
2.8	Forza di attrito radente	50	4.8	Il teorema dell'energia cinetica	144
2.9	Piano inclinato	53	4.9	Urti tra due punti materiali	147
2.10	Forza elastica	56	4.10	Urto completamente anelastico	149
2.11	Forza di attrito viscoso	59	4.11	Urto elastico	152
2.12	Forze centripete	60	4.12	Urto anelastico	155
2.13	Pendolo semplice	62	4.13	Ulteriori nozioni sugli urti	157
2.14	Tensione dei fili	64	4.14	Urti relativistici	158
2.15	Lavoro. Potenza. Energia cinetica	68	4.15	Proprietà dei sistemi di forze applicate a punti diversi	160
2.16	Lavoro della forza peso	71	4.16	Massa variabile	162
2.17	Lavoro di una forza elastica	73			
2.18	Lavoro di una forza di attrito radente	74			
2.19	Forze conservative. Energia potenziale	75			
2.20	Conservazione dell'energia meccanica	77			
2.21	Relazione tra energia potenziale e forza	82	Capitolo 5	Gravitazione	165
2.22	Momento angolare. Momento della forza	83	5.1	La forza gravitazionale	165
2.23	Forze centrali	85	5.2	Massa inerziale e massa gravitazionale	168
2.24	Riepilogo	87	5.3	Campo gravitazionale	169
			5.4	Energia potenziale gravitazionale	171

5.5	Teorema di Gauss. Distribuzione sferica di massa	176	8.8	Teorema di Bernoulli	273
5.6	Determinazione della traiettoria	179	8.9	Applicazioni del teorema di Bernoulli	275
5.7	Cenni di relatività generale	186	8.10	Effetti dinamici. Vortici	278
Capitolo 6 Dinamica del corpo rigido. Cenni di statica 187			8.11	Moto laminare	279
6.1	Definizione di corpo rigido. Prime proprietà	187	8.12	Moto vorticoso. Numero di Reynolds	280
6.2	Moto di un corpo rigido	189	8.13	Moto in un fluido. Resistenza del mezzo	281
6.3	Corpo continuo. Densità. Posizione del centro di massa	192	8.14	Effetto Magnus. Portanza	282
6.4	Rotazioni rigide attorno ad un asse fisso in un sistema di riferimento inerziale	198	8.15	Fenomeni di superficie	283
6.5	Momento d'inerzia	204	8.16	Forze di coesione e adesione. Fenomeni di capillarità	286
6.6	Teorema di Huygens-Steiner	209	Capitolo 9 Oscillazioni e onde 288		
6.7	Pendolo composto	212	9.1	Richiamo delle proprietà già viste	288
6.8	Moto di puro rotolamento	213	9.2	Proprietà dell'equazione differenziale dell'oscillatore armonico	289
6.9	Impulso angolare. Momento dell'impulso	220	9.3	Energia dell'oscillatore armonico	292
6.10	Teorema di Poincot. Ellissoide d'inerzia	224	9.4	Somma di moti armonici sullo stesso asse	295
6.11	Giroscopi	227	9.5	Somma di moti armonici su assi ortogonali	298
6.12	Corpo rigido libero	229	9.6	Oscillatore armonico smorzato da una forza di attrito costante	301
6.13	Leggi di conservazione nel moto di un corpo rigido	230	9.7	Oscillatore armonico smorzato da una forza viscosa	303
6.14	Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi	234	9.8	Oscillatore armonico forzato	307
6.15	Statica	239	9.9	Analisi di Fourier	311
6.16	Riepilogo	243	9.10	Introduzione ai fenomeni ondulatori	312
Capitolo 7 Proprietà elastiche dei solidi 245			9.11	Onde elastiche in una sbarra solida	315
7.1	Trazione e compressione	245	9.12	Onde in una corda tesa	317
7.2	Deformazione plastica. Rottura. Isteresi elastica	250	9.13	Proprietà elastiche dei gas. Onde nei gas	318
7.3	Scorrimento	251	9.14	Ulteriori considerazioni sulle onde	323
7.4	Torsione. Pendolo e bilancia di torsione	252	Problemi di Meccanica 325		
7.5	Pressione. Compressione uniforme	255	Guida alla risoluzione dei problemi di Meccanica. Risultati numerici 344		
7.6	Durezza	257	Capitolo 10 Primo principio della termodinamica 363		
Capitolo 8 Proprietà meccaniche dei fluidi 259			10.1	Sistemi e stati termodinamici	363
8.1	Generalità sui fluidi. Pressione	259	10.2	Equilibrio termodinamico. Principio dell'equilibrio termico	365
8.2	Equilibrio statico di un fluido	262	10.3	Definizione di temperatura. Termometri	366
8.3	Equilibrio in presenza della forza peso	264	10.4	Sistemi adiabatici. Esperimenti di Joule. Calore	369
8.4	Principio di Archimede	267	10.5	Primo principio della termodinamica. Energia interna	370
8.5	Liquido in rotazione	269	10.6	Trasformazioni termodinamiche. Lavoro e calore	373
8.6	Attrito interno. Viscosità. Fluido ideale	271			
8.7	Moto di un fluido. Regime stazionario. Portata	272			

Moti relativi

3.1 Sistemi di riferimento. Velocità e accelerazione relative

Sperimentalmente è provato con estrema accuratezza che *le leggi fisiche non dipendono dalla scelta del sistema di riferimento*. Fissato un sistema di riferimento e stabilita una certa proprietà, questa resta vera anche se cambiano l'origine e l'orientazione degli assi coordinati, ovvero se ci riferiamo ad un altro sistema ottenuto dal primo con una traslazione (spostamento dell'origine, conservando la stessa direzione degli assi) o con una rotazione (stessa origine, cambio della direzione degli assi) o con una operazione combinata. Non esiste pertanto un punto privilegiato dello spazio e nemmeno un'orientazione privilegiata: *lo spazio appare omogeneo e isotropo*.

La caratteristica sostanziale di invarianza acquista un aspetto formale se le leggi fisiche vengono espresse come relazioni tra entità che godono anch'esse delle suddette proprietà di invarianza, come le grandezze scalari o quelle vettoriali o altre più complesse, come ad esempio i tensori.

La situazione si presenta diversa quando un fenomeno viene osservato da due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nel caso del moto di un corpo abbiamo già rilevato come il concetto stesso di moto sia relativo; un esempio semplice è quello di una persona seduta in un mezzo di trasporto in movimento: essa è in quiete rispetto al mezzo, ma è in movimento rispetto al suolo con la velocità che ha il mezzo. Più in generale, il moto viene descritto con leggi diverse in due sistemi di riferimento in moto relativo, a meno che questo moto non abbia certe caratteristiche che tra breve specificheremo. Non sussiste cioè invarianza delle leggi fisiche rispetto a due sistemi di riferimento in moto qualsiasi l'uno rispetto all'altro.

Teorema delle velocità relative

Nella figura 3.1 è rappresentato un punto P in movimento lungo una generica traiettoria. Il suo moto viene osservato da una terna cartesiana con centro in O che,

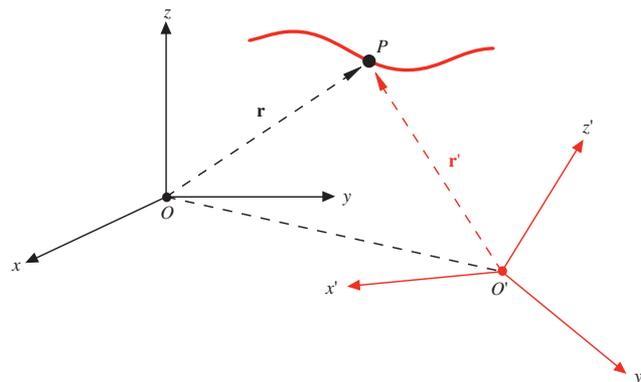


Figura 3.1

per convenzione, chiamiamo *sistema fisso* e da una terna cartesiana con centro O' che, sempre per convenzione, chiamiamo *sistema mobile*.

Vogliamo ricavare una relazione tra la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P , misurate da un osservatore solidale con il sistema fisso, e le corrispondenti grandezze misurate da un osservatore solidale con il sistema mobile. Cercheremo poi di stabilire come la nozione di invarianza possa eventualmente estendersi appunto al caso in cui i sistemi di riferimento siano in moto l'uno rispetto all'altro. Ripetiamo che la dizione sistema fisso e sistema mobile è solo una questione di convenzioni. Vedremo in seguito che esiste una maniera più fisica per distinguere i sistemi di riferimento in due classi ben diverse.

La relazione tra le posizioni del punto P , misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, è la seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{OO}' + \mathbf{r}' \quad , \quad (3.1)$$

con

$$\mathbf{r} = x\mathbf{u}_x + y\mathbf{u}_y + z\mathbf{u}_z \quad , \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'} \quad , \quad \mathbf{OO}' = x_{O'}\mathbf{u}_x + y_{O'}\mathbf{u}_y + z_{O'}\mathbf{u}_z \quad .$$

Assumiamo, in accordo con la convenzione che il primo sistema sia fisso, che i versori $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ siano indipendenti dal tempo; tali non sono invece i versori degli assi del sistema mobile.

La velocità del punto P rispetto al sistema fisso, che chiamiamo *velocità assoluta*, è data da

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz}{dt} \mathbf{u}_z \quad , \quad \text{Velocità assoluta}$$

mentre quella misurata da un osservatore solidale al sistema mobile, che indichiamo come *velocità relativa*, è

$$\mathbf{v}' = \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \quad . \quad \text{Velocità relativa}$$

La velocità dell'origine O' del sistema di riferimento mobile misurata da un osservatore nel sistema fisso è data da

$$\mathbf{v}_{O'} = \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z \quad .$$

La derivata rispetto al tempo della (3.1) fornisce

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{OO}'}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{dx_{O'}}{dt} \mathbf{u}_x + \frac{dy_{O'}}{dt} \mathbf{u}_y + \frac{dz_{O'}}{dt} \mathbf{u}_z + \\ &+ \frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \end{aligned}$$

ovvero

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + x' \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + y' \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + z' \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} \quad . \quad (3.2)$$

Osserviamo che $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ non coincide con \mathbf{v}' in quanto nella variazione di \mathbf{r}' com-

paiono non solo le derivate delle coordinate, ma anche quelle dei versori degli assi del sistema mobile, che forniscono gli ultimi tre termini della (3.2).

Da (1.33) abbiamo che la derivata di un versore \mathbf{u} , in quanto vettore con modulo costante, si può scrivere $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$; pertanto per le derivate dei tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, si hanno le seguenti *formule*, dette di *Poisson*:

Formule di Poisson

$$\frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'} \quad , \quad \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

I tre versori $\mathbf{u}_{x'}$, $\mathbf{u}_{y'}$, $\mathbf{u}_{z'}$, che individuano la terna mobile, sono rigidamente legati l'uno all'altro, nel senso che le loro mutue orientazioni non possono cambiare. Alla rotazione di uno, con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, corrisponde la rotazione degli altri due con la stessa velocità angolare, come se essi fossero parte di un unico corpo indeformabile (questo risultato sarà più chiaro dopo lo studio del corpo rigido, nel capitolo 6; ad ogni modo le formule di Poisson sono dimostrate per esteso nel paragrafo 3.7).

Possiamo adesso riscrivere gli ultimi tre termini di (3.2) come

$$x'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{x'}) + y'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{y'}) + z'(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times (x'\mathbf{u}_{x'} + y'\mathbf{u}_{y'} + z'\mathbf{u}_{z'}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' ; \quad (3.3)$$

dato che x' , y' , z' sono numeri, li abbiamo trasportati a secondo membro in ciascun prodotto vettoriale. Sostituendo (3.3) in (3.2) otteniamo

Teorema delle velocità relative

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.4)$$

In particolare

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.5)$$

La (3.4) esprime il *teorema delle velocità relative*; le misure di velocità compiute nei due sistemi sono diverse, ma non sono scorrelate, in quanto legate appunto dalla (3.4).

La differenza \mathbf{v}_t tra le velocità misurate nei due sistemi di riferimento è chiamata *velocità di trascinamento*:

Velocità di trascinamento

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.6)$$

Essa è pari alla velocità rispetto al sistema fisso di quel punto P^* , solidale con il sistema mobile, che coincide nell'istante considerato con punto P ; per tale punto P^* infatti $\mathbf{v}' = 0$, proprio in quanto esso è solidale con il sistema mobile. In altre parole, se P fosse fermo rispetto al sistema mobile, la sua velocità misurata dal sistema fisso coinciderebbe con la velocità di trascinamento. Se invece P si muove rispetto al sistema mobile, la (3.4) afferma che la velocità assoluta è la somma della velocità relativa e di quella di trascinamento.

Il moto di trascinamento, legato in pratica al moto del sistema mobile, può essere considerato in ogni istante come la somma di un termine traslatorio con velocità istantanea $\mathbf{v}_{O'}$ e di un termine rotatorio con velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$, variabile in generale sia in modulo che in direzione.

Teorema delle accelerazioni relative

Consideriamo ora la relazione tra le accelerazioni del punto P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento. Rispetto al sistema fisso l'*accelerazione assoluta* è data da

Accelerazione assoluta

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{u}_z \quad ,$$

mentre rispetto al sistema mobile l'*accelerazione relativa* è

$$\mathbf{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} \quad .$$

L'accelerazione dell'origine del sistema mobile O' rispetto a O è data da $\mathbf{a}_{O'} = d\mathbf{v}_{O'}/dt$. Derivando (3.4) rispetto al tempo otteniamo:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_{O'}}{dt} + \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \quad .$$

Calcoliamo $d\mathbf{v}'/dt$:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dx'}{dt} \mathbf{u}_{x'} + \frac{dy'}{dt} \mathbf{u}_{y'} + \frac{dz'}{dt} \mathbf{u}_{z'} \right) = \frac{d^2x'}{dt^2} \mathbf{u}_{x'} + \frac{d^2y'}{dt^2} \mathbf{u}_{y'} + \\ &+ \frac{d^2z'}{dt^2} \mathbf{u}_{z'} + \frac{dx'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{x'}}{dt} + \frac{dy'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{y'}}{dt} + \frac{dz'}{dt} \frac{d\mathbf{u}_{z'}}{dt} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \end{aligned}$$

Abbiamo di nuovo utilizzato le formule di Poisson per il calcolo delle derivate dei vettori degli assi mobili. Da (3.5) si ha inoltre

$$\boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}')$$

e pertanto

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \quad (3.7)$$

Teorema delle accelerazioni relative

Le accelerazioni del punto P misurate nei due sistemi non coincidono, ma sono messe in relazione tramite la (3.7), detta *teorema delle accelerazioni relative*.

Per valutare l'*accelerazione di trascinamento* \mathbf{a}_t riprendiamo la discussione fatta per la velocità di trascinamento. L'accelerazione di trascinamento è quella del punto P^* , solidale col sistema mobile, che coincide nell'istante considerato col punto P . Per P^* \mathbf{a}' e \mathbf{v}' sono nulle e da (3.7)

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' \quad . \quad (3.8)$$

Accelerazione di trascinamento

Possiamo pertanto riscrivere (3.7) come

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c \quad ;$$

l'ultimo termine

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.9)$$

Accelerazione di Coriolis

è chiamato *accelerazione complementare o di Coriolis*; esso dipende dal moto di P rispetto al sistema mobile tramite la velocità relativa \mathbf{v}' .

La complessa struttura della (3.7) fa comprendere quanto possa essere diversa la descrizione del moto di uno stesso punto visto da due sistemi diversi. Conseguentemente saranno diverse le forze che vengono *ipotizzate* per spiegare il determinato tipo di moto da parte degli osservatori solidali a differenti sistemi di riferimento. Passeremo quindi ad esaminare, dopo le relazioni cinematiche, gli aspetti dinamici del moto relativo. Prima trattiamo però un particolare caso cinematico di moto relativo.

Velocità e accelerazione di un punto rispetto ad un altro

Oltre al moto di un punto visto da due diversi sistemi di riferimento, è necessario talvolta considerare il moto di un punto rispetto ad un altro punto. Per discutere questo argomento ci serviamo dei risultati appena trovati, anche se si potrebbe arrivare alla soluzione in modo più diretto.

Abbiamo due punti che si muovono in un sistema O , con posizione, velocità e accelerazione date da:

$$\begin{aligned} \text{punto } P_1 \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{OP}_1 \quad , \quad \mathbf{v}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_1 = \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \quad , \\ \text{punto } P_2 \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{OP}_2 \quad , \quad \mathbf{v}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \quad , \quad \mathbf{a}_2 = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \quad . \end{aligned}$$

La posizione relativa di P_2 rispetto a P_1 è individuata dal raggio vettore che va da P_1 a P_2 ,

$$\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{1,2} \quad .$$

Per calcolare la velocità di P_2 relativa a P_1 immaginiamo un secondo sistema di riferimento O' , con origine in P_1 e assi che non ruotano rispetto a quelli di O ($\boldsymbol{\omega} = 0$): la velocità di P_2 vista da O' è appunto la velocità di P_2 rispetto a P_1 , che indichiamo con $\mathbf{v}_{2,1}$. Con riferimento a (3.4), la velocità assoluta \mathbf{v} è \mathbf{v}_2 , la velocità relativa \mathbf{v}' è $\mathbf{v}_{2,1}$ e la velocità di trascinamento $\mathbf{v}_{O'} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ è solo $\mathbf{v}_{O'} = \mathbf{v}_1$ in quanto $\boldsymbol{\omega} = 0$. Pertanto

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_{2,1} + \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_{2,1} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad .$$

Allo stesso modo si dimostra che l'accelerazione di P_2 rispetto a P_1 è

$$\mathbf{a}_{2,1} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \quad .$$

In conclusione, posizione, velocità e accelerazione di un punto in moto rispetto ad un altro punto in moto sono date dalla differenza tra le posizioni, le velocità e le accelerazioni dei due punti, in un dato sistema di riferimento.

Il risultato può essere enunciato in modo diverso. Il vettore $\mathbf{r}_{1,2}$ può essere pensato come un segmento in movimento, di cui variano nel tempo modulo e direzione. La derivata rispetto al tempo di tale segmento mobile è data da

$$\frac{d\mathbf{r}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{2,1} \quad ,$$

cioè dalla differenza delle velocità dei due estremi. Analogamente

$$\frac{d\mathbf{v}_{1,2}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} = \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_{2,1} \quad .$$

Ci serviremo di queste formule nella dimostrazione del teorema del momento angolare (paragrafo 4.4). Esse vanno sempre tenute presenti nei problemi in cui si considerano moti relativi tra due corpi (ad esempio, un corpo che scivola sopra un altro, a sua volta in movimento). Implicitamente le abbiamo già usate in alcuni esempi e problemi relativi al capitolo 2.

3.2 Sistemi di riferimento inerziali. Relatività galileiana

Definiamo come *sistema di riferimento inerziale* un sistema in cui valga rigorosamente la legge di inerzia, in cui cioè un punto *non soggetto a forze* lanciato con velocità arbitraria in qualunque direzione si muova con moto rettilineo uniforme o, se è in quiete, resti in quiete.

Sistema di riferimento
inerziale

È evidente che la definizione di sistema di riferimento inerziale ha significato solo se siamo in grado di verificare in modo diverso che il punto non è soggetto a forze. È ragionevole supporre che questa situazione si verifichi sia quando il punto è sufficientemente lontano da ogni altro corpo in modo da poter trascurare ogni interazione, sia quando è possibile bilanciare le forze agenti in modo che la risultante sia nulla. Assumiamo pertanto di poter disporre di un punto materiale non soggetto a forze e quindi di poter verificare se il sistema di riferimento in cui si osserva il moto sia inerziale o no (una simile ammissione è stata implicitamente fatta quando abbiamo introdotto il principio di inerzia).

In un sistema di riferimento inerziale la legge di Newton (2.1) ha l'espressione più semplice: le forze che compaiono a primo membro sono le *forze vere* cioè quelle che sappiamo derivare dalle interazioni fondamentali, classificate nel paragrafo 2.5, e la risultante è proporzionale all'accelerazione misurata in quel sistema di riferimento.

Consideriamo ora un altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad un certo sistema inerziale. Pertanto si ha

$$\mathbf{v}_{O'} = \text{costante} \quad , \quad \mathbf{a}_{O'} = 0 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad .$$

Da (3.7) ricaviamo $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$: le accelerazioni di un punto misurate nei due sistemi di riferimento sono eguali. Se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$ e quindi pure il secondo sistema è inerziale.

Abbiamo così ottenuto questo risultato fondamentale: *definito un sistema di riferimento inerziale, tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto a questo sono anch'essi inerziali*. Per tali sistemi la legge di Newton si scrive allo stesso modo, ossia con gli stessi valori di \mathbf{F} e di \mathbf{a} : se cioè nel sistema inerziale O si misura \mathbf{a} e si deduce che la forza agente è $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, nel sistema inerziale O' si misura la stessa \mathbf{a} e si ricava la stessa forza $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

Conseguenza importante è che, essendo la dinamica la stessa, non è possibile stabilire, tramite misure effettuate in questi diversi sistemi di riferimento, se uno di essi è in quiete o in moto. Non ha cioè senso il concetto di moto assoluto. Tale situazione fisica viene descritta anche con il termine di *relatività galileiana*.

Se il moto del secondo sistema è accelerato rispetto al sistema inerziale, sia perché $\mathbf{a}_{O'} \neq 0$ oppure $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ o per entrambe le ragioni, si osserva che la legge di Newton non è più valida, la *forza vera* che agisce sul punto considerato non è proporzionale all'accelerazione del punto, misurata nel sistema accelerato.

Tale risultato appare chiaro da (3.7): infatti, se $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ nel sistema inerziale, nel sistema mobile in moto accelerato non può sussistere la relazione $\mathbf{F} = m\mathbf{a}'$ poiché $\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$. D'altra parte, se moltiplichiamo i termini di (3.7) per la massa del punto e teniamo conto che $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, abbiamo:

$$\mathbf{F} - m\mathbf{a}_t - m\mathbf{a}_c = m\mathbf{a}' \quad , \quad (3.10)$$

dove \mathbf{a}_t e \mathbf{a}_c sono le accelerazioni di trascinato e di Coriolis come definite rispettivamente da (3.8) e (3.9).

La (3.10) rappresenta una forma modificata dalla legge di Newton: in un sistema non inerziale il prodotto della massa del punto materiale per l'accelerazione misurata in quel sistema è eguale alla *forza vera* agente sul punto più le *forze apparenti*. Queste ultime forze, che sono sempre proporzionali alla massa del punto e

Forze apparenti o forze
di inerzia

vengono pertanto chiamate anche *forze di inerzia*, appaiono agenti solo nel sistema non inerziale, dove costituiscono il termine correttivo che permette di ritornare ad una espressione $\mathbf{F}' = m\mathbf{a}'$. È chiaro che *le forze apparenti non derivano dalle interazioni fondamentali e non esistono in un sistema di riferimento inerziale*.

Riteniamo che ora sia evidente l'importanza di riferire le misure ad un sistema inerziale. In tale sistema infatti la descrizione di un fenomeno dinamico è più semplice e più aderente a quelli che supponiamo siano i meccanismi fisici di base. Se osserviamo in un sistema inerziale un punto materiale che descrive una traiettoria curva possiamo affermare che su di esso agisce una forza (vera); se $\mathbf{F} = 0$ sappiamo che il moto è rettilineo uniforme e viceversa.

In un sistema accelerato vediamo da (3.10) che $\mathbf{F} = 0$ non comporta $\mathbf{a}' = 0$ e quindi l'osservazione di un moto rettilineo uniforme. Questo risultato giustifica il nome di sistema *non inerziale* per un sistema accelerato. Analogamente, una traiettoria curva non presuppone necessariamente l'azione di una forza (vera), ma può essere un effetto *apparente*, conseguenza del moto accelerato del sistema in cui si trova l'osservatore, e così via.

Sottolineiamo che tutto ciò non significa che la descrizione nel sistema inerziale è corretta, mentre quella nel sistema non inerziale è sbagliata. In entrambi i sistemi, note le condizioni iniziali del moto e le forze agenti, facciamo previsioni corrette per il moto di un punto tramite (2.1) o (3.10). Però nel sistema non inerziale la descrizione è più complicata, dovendosi introdurre termini correttivi non provenienti dalle interazioni fondamentali. Un osservatore che vivesse sempre in un sistema non inerziale potrebbe avere difficoltà a comprendere che agiscono delle forze con una struttura complessa come quella nella (3.10) e non soltanto un'unica forza \mathbf{F}' .

Nei prossimi paragrafi presenteremo vari esempi di moti osservati da due sistemi di riferimento diversi, di cui almeno uno inerziale. Utilizzeremo le reazioni (3.1), (3.4), (3.7) e (3.10) valide per qualsiasi coppia di sistemi. Assumeremo come inerziale il sistema con origine O , mentre l'altro avrà origine in O' e metteremo in evidenza cosa misurano due osservatori, detti per brevità O e O' , solidali con i due sistemi.

Questi due osservatori, che possono comunicare tra loro, sono esperti nella Fisica e cercano di cogliere il significato delle loro misure. Dall'esame di queste comprenderemo la diversità della cinematica e la differente interpretazione dinamica che si possono avere per uno stesso fenomeno visto da due sistemi in moto relativo tra loro.

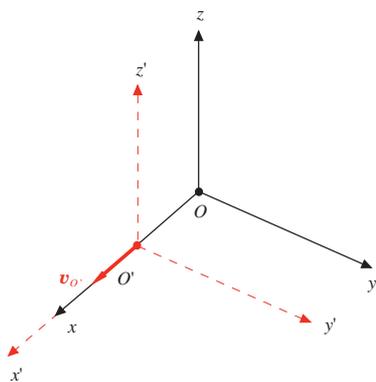


Figura 3.2

Trasformazione galileiana

3.3 Moto di trascinamento rettilineo uniforme

Consideriamo due sistemi inerziali in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro e mettiamoci nel caso semplice, che non è però limitativo, rappresentato in figura 3.2. Gli assi dei due sistemi sono paralleli ed il sistema di origine O' si sposta con velocità costante $\mathbf{v}_{O'}$ parallela all'asse x . Inoltre all'istante $t = 0$ le origini coincidono così che $\mathbf{OO}' = \mathbf{v}_{O'} t$.

Proiettando sugli assi la relazione $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{OO}'$, che lega le posizioni di un punto P nei due sistemi di riferimento otteniamo

$$x' = x - v_{O'} t \quad , \quad y' = y \quad , \quad z' = z \quad . \quad (3.11)$$

Analogamente per le velocità, utilizzando (3.4), si ha $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'}$ e quindi

$$v'_x = v_x - v_{O'} \quad , \quad v'_y = v_y \quad , \quad v'_z = v_z \quad . \quad (3.12)$$

Infine per le accelerazioni è $\mathbf{a}' = \mathbf{a}$, dato che ambedue i sistemi sono inerziali.

Le relazioni (3.11), che permettono di calcolare le coordinate del punto in un sistema inerziale note quelle nell'altro sistema inerziale, esprimono una *trasformazione galileiana* tra i due sistemi; analogamente (3.12) è la trasformazione galileiana delle velocità.

Negli esempi seguenti esaminiamo alcuni casi particolari di moto del punto P . La figura di riferimento per il moto relativo dei due sistemi è sempre la 3.2, con $\mathbf{v}_{O'}$ costante.

Esempio 3.1

Un punto P descrive nel piano x, y un moto rettilineo uniforme con velocità \mathbf{v} , di componenti v_x e v_y , partendo all'istante $t=0$ dalla posizione di coordinate x_0, y_0 . Determinare il moto visto dal sistema O' .

Soluzione

Scriviamo le equazioni dei moti proiettati sugli assi servendoci di (3.11):

$$x = x_0 + v_x t \quad , \quad x' = x - v_{O'} t = x_0 + (v_x - v_{O'}) t \quad ,$$

$$y = y_0 + v_y t \quad , \quad y' = y = y_0 + v_y t \quad ,$$

$$z = 0 \quad , \quad z' = z = 0 \quad .$$

Anche nel sistema O' le componenti della velocità del punto sono costanti e quindi il moto è rettilineo uniforme (come ci aspettiamo essendo i due sistemi inerziali: se $\mathbf{a} = 0$ anche $\mathbf{a}' = 0$). Però l'inclinazione della traiettoria rispetto all'asse $x \equiv x'$ è diversa nei due sistemi, così come è diverso il modulo della velocità:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{v_y}{v_x} \quad , \quad \operatorname{tg} \phi' = \frac{v_y'}{v_x'} = \frac{v_y}{v_x - v_{O'}} \quad ,$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad , \quad v' = \sqrt{(v_x - v_{O'})^2 + v_y^2} \quad .$$

Nella figura 3.3 è mostrato un caso particolare in cui $v_{O'}$ è positiva e minore di v_x (si ricordi che nell'istante iniziale le origini dei due sistemi coincidono).

Se fosse $v_{O'} = v_x$, cioè se il sistema O' si muovesse con velocità eguale alla componente v_x della velocità del punto, sarebbe $v_x' = 0$ e il moto visto da O' risulterebbe parallelo all'asse $y \equiv y'$. Solo quando il moto in O è parallelo all'asse x , cioè all'asse della traslazione tra i due sistemi, anche in O' si osserva un moto parallelo all'asse x' .

Riassumendo, entrambi gli osservatori vedono un moto rettilineo uniforme e concordano sul fatto che l'accelerazione è nulla e che quindi non ci sono forze agenti; le traiettorie appaiono diverse, e percorse con velocità diverse, perché nei due sistemi sono diverse le condizioni iniziali ($v_x \neq v_x'$).

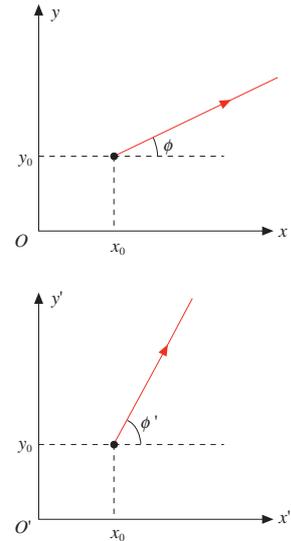


Figura 3.3 (Esempio 3.1)

Esempio 3.2

Un punto P compie nel piano x, y un moto rettilineo uniformemente accelerato con accelerazione \mathbf{a} , di componenti a_x e a_y , partendo con velocità iniziale nulla dall'origine. Determinare il moto visto nel sistema O' .

Soluzione

Ricorriamo di nuovo a (3.11) e anche a (3.12):

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \quad , \quad x' = x - v_{O'} t = \frac{1}{2} a_x t^2 - v_{O'} t \quad ,$$

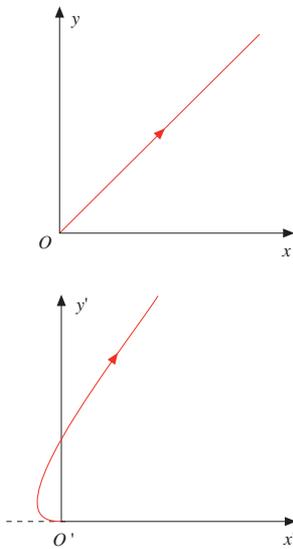


Figura 3.4 (Esempio 3.2)

$$y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad , \quad y' = y = \frac{1}{2} a_y t^2 \quad ,$$

$$v_x = a_x t \quad , \quad v'_x = v_x - v_{O'} = a_x t - v_{O'} \quad ,$$

$$v_y = a_y t \quad , \quad v'_y = v_y = a_y t \quad .$$

O vede una traiettoria rettilinea con pendenza $v_y / v_x = a_y / a_x$. Invece O' vede una traiettoria curva: infatti la pendenza

$$\frac{v'_y}{v'_x} = \frac{a_y t}{a_x t - v_{O'}}$$

dipende dal tempo; la velocità iniziale è negativa, pari a $-v_{O'}$. In figura 3.4 è mostrato un caso particolare.

Per entrambi gli osservatori l'accelerazione è la stessa e quindi la forza è la stessa, parallela e concorde alla traiettoria vista da O ; O' vede una traiettoria curva in quanto la forza e la velocità iniziale non sono parallele. Solo se $a_y = 0$, cioè se in O la traiettoria coincide con l'asse x , anche O' vede un moto rettilineo uniformemente accelerato.

Esempio 3.3

Nel sistema O un punto viene lasciato cadere lungo l'asse z , da un'altezza h . Cosa vede O' ?

Soluzione

Le equazioni del moto nel sistema O sono:

$$x = 0 \quad , \quad y = 0 \quad , \quad z = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

$$v_x = 0 \quad , \quad v_y = 0 \quad , \quad v_z = -g t \quad .$$

Invece in O' abbiamo:

$$x' = -v_{O'} t \quad , \quad y' = 0 \quad , \quad z' = h - \frac{1}{2} g t^2 \quad ,$$

$$v'_x = -v_{O'} \quad , \quad v'_y = 0 \quad , \quad v'_z = -g t \quad .$$

Quindi in O' il moto è composto da un moto rettilineo uniforme lungo l'asse x' con velocità $-v_{O'}$ e da un moto uniformemente accelerato lungo l'asse z' : la traiettoria è un arco di parabola, e si verifica facilmente che il punto cade a distanza $-v_{O'} \sqrt{2h/g}$ dall'origine O' . Come nell'esempio 3.2, entrambi gli osservatori misurano la stessa accelerazione, ma vedono traiettorie diverse perché sono diverse le condizioni iniziali.

Se invece il punto inizialmente è in quiete rispetto ad O' (e si muove quindi con velocità $v_{O'}$ rispetto ad O), durante la caduta esso continua a muoversi orizzontalmente con la stessa velocità di O' e pertanto in O' cade verticalmente. Per O il punto ha la velocità iniziale $v_{O'}$ e cadendo descrive un arco di parabola, con uno spostamento dall'origine eguale a quello prima calcolato (figure 3.5 e 3.6).

La caduta appare verticale nel sistema in cui il punto è in quiete e appare parabolica nell'altro sistema. Dalla forma della traiettoria l'osservatore non può dedurre se è in quiete o in moto rettilineo uniforme.

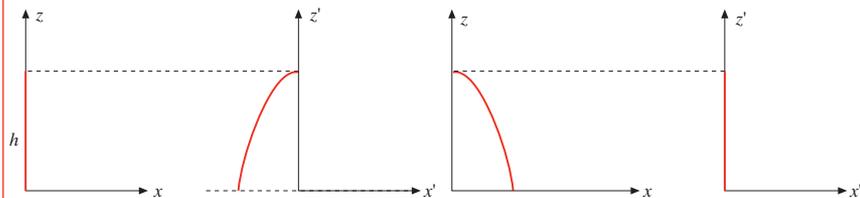


Figura 3.5

Figura 3.6

3.4 Moto di trascinamento rettilineo accelerato

Assumendo la stessa condizione geometrica del sistema O' rispetto al sistema O vista nel precedente paragrafo, supponiamo ora che O' abbia una accelerazione costante $\mathbf{a}_{O'} = \mathbf{a}_t$ e una velocità iniziale \mathbf{v}_{in} , ambedue parallele e concordi all'asse $x \equiv x'$. La posizione e la velocità di O' sono quindi espresse da

$$x_{O'} = v_{in} t + \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , \quad v_{O'} = v_{in} + a_t t \quad .$$

Le formule di trasformazione (3.11) e (3.12) diventano

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} - \mathbf{OO}' & x' &= x - v_{in} t - \frac{1}{2} a_t t^2 \quad , & y' &= y \quad , & z' &= z \quad , \\ \mathbf{v}' &= \mathbf{v} - \mathbf{v}_{O'} & v'_x &= v_x - v_{in} - a_t t \quad , & v'_y &= v_y \quad , & v'_z &= v_z \quad , \\ \mathbf{a}' &= \mathbf{a} - \mathbf{a}_{O'} & a'_x &= a_x - a_t \quad , & a'_y &= a_y \quad , & a'_z &= a_z \quad . \end{aligned}$$

Come nel caso del moto di trascinamento rettilineo uniforme, anche ora illustriamo con esempi alcune semplici situazioni. Caratteristica distintiva è la diversità delle accelerazioni nei due sistemi, O inerziale e O' non inerziale, e quindi la diversità delle forze agenti, con conseguente comparsa delle forze d'inerzia secondo (3.10).

Esempio 3.4

Il sistema O' è solidale ad un carrello che si muove con accelerazione a_t positiva rispetto al sistema O (nella situazione geometrica della figura 3.2). All'istante $t = 0$, quando O e O' coincidono, un punto materiale viene lasciato cadere da una piattaforma alta h solidale al carrello. Descrivere il moto di caduta visto da O e da O' , calcolando in particolare dove cade il punto.

Soluzione

Consideriamo prima cosa vede l'osservatore inerziale. All'istante $t = 0$ il punto materiale è ad altezza h e possiede la velocità iniziale del carrello, cioè v_{in} , parallela all'asse x ; negli istanti successivi esso è sottoposto soltanto alla forza di gravità. La traiettoria osservata è parabolica e valgono le seguenti equazioni:

$$\begin{aligned} x &= v_{in} t \quad , & y &= 0 \quad , & z &= h - \frac{1}{2} g t^2 \quad , \\ v_x &= v_{in} \quad , & v_y &= 0 \quad , & v_z &= -g t \quad , \\ a_x &= 0 \quad , & a_y &= 0 \quad , & a_z &= -g \quad . \end{aligned}$$

Il tempo di caduta è $t_c = \sqrt{2h/g}$ e lo spazio percorso lungo l'asse x è $x_c = v_{in} t_c$. Nello stesso tempo il carrello è avanzato di $x_{O'} = v_{in} t_c + \frac{1}{2} a_t t_c^2$. Pertanto il punto materiale tocca il pavimento del carrello più indietro rispetto a O' della quantità

$$d = x_{O'} - x_c = \frac{1}{2} a_t t_c^2 = \frac{a_t h}{g} \quad .$$

Nella figura 3.7 è rappresentata la distanza tra il punto e O' nell'istante in cui il punto tocca il pavimento; la linea punteggiata è la traiettoria vista da O , mentre gli assi tratteggiati danno la posizione iniziale del sistema O' (coincidente con O).

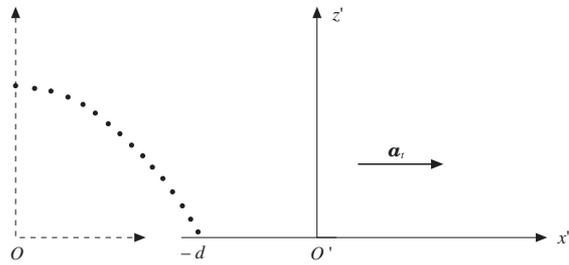


Figura 3.7

Se fosse $v_{in} = 0$, l'osservatore O vedrebbe una caduta rettilinea, ma la distanza d sarebbe la stessa, essendo questa indipendente da v_{in} .

Applicando le formule di trasformazione scritte all'inizio del paragrafo possiamo dedurre cosa vede O' :

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{1}{2} a_t t^2, & y' &= 0, & z' &= h - \frac{1}{2} g t^2, \\ v_x' &= -a_t t, & v_y' &= 0, & v_z' &= -g t, \\ a_x' &= -a_t, & a_y' &= 0, & a_z' &= -g. \end{aligned}$$

Il risultato, indipendente da v_{in} , mostra come anche in O' l'accelerazione sia costante, ma diversa da \mathbf{g} . Essa vale

$$\mathbf{a}' = -a_t \mathbf{u}_x - g \mathbf{u}_z = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t.$$

La velocità è proporzionale all'accelerazione, $\mathbf{v}' = \mathbf{a}'t$. Pertanto O' osserva un moto di caduta rettilinea uniformemente accelerato nel piano x', z' lungo la retta di equazione

$$z' = h + \frac{g}{a_t} x'.$$

Il punto materiale tocca il pavimento del carrello ($z' = 0$) nella posizione

$$x' = -\frac{a_t h}{g},$$

cioè all'indietro rispetto a O' della stessa quantità calcolata in O .

L'angolo formato dalla linea di caduta con l'asse z' è

$$\theta = \arctg \frac{a_t}{g},$$

come mostrato nella figura 3.8.

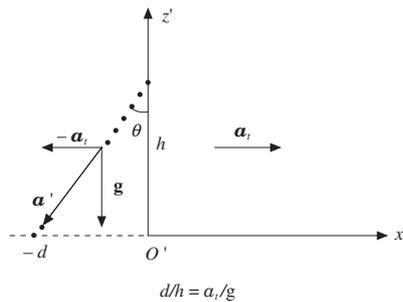


Figura 3.8

Secondo O l'osservazione di O' si spiega semplicemente col fatto che O' si muove di moto accelerato. Invece O' per spiegare il moto deve aggiungere alla forza peso mg la forza apparente $-ma_t$; la somma delle due forze è eguale a ma' . Se identifichiamo con

la verticale la linea di caduta libera dei corpi, nel sistema O' c'è una verticale apparente che forma l'angolo θ con la verticale inerziale; un filo a piombo sul carrello si disporrebbe ad angolo θ rispetto all'asse z' . Dalla misura di θ si può dedurre il valore di a_t e determinare che il moto di trascinamento è accelerato; se fosse $a_t = 0$, sarebbe anche $\theta = 0$ e $d = 0$, il punto cadrebbe lungo l'asse z' , come nella figura 3.6 dell'esempio 3.3.

Esempio 3.5

Un punto materiale di massa m è posto sul pavimento liscio di un carrello che avanza con accelerazione a_t rispetto al sistema inerziale O (figura 3.9). Ad un estremo del carrello è fissata una molla di costante elastica k . Descrivere le osservazioni di O e O' .

Soluzione

Nel sistema inerziale si osserva la seguente successione di eventi. Il punto resta fermo mentre il carrello gli scorre sotto (non c'è attrito) fino a quando l'estremo libero della molla lo raggiunge. La molla inizia allora a comprimersi e il punto a muoversi; a regime il punto è fermo rispetto al carrello e si muove con accelerazione a_t rispetto a O , la molla è compressa della quantità $x_c = ma_t/k$: infatti è la forza elastica della molla che applicata al punto gli comunica l'accelerazione a_t ($kx_c = ma_t$).

Per l'osservatore O' , solidale al carrello, inizialmente il punto è in moto con accelerazione $-a_t$ (in effetti $\mathbf{a}' = \mathbf{a} - \mathbf{a}_t = -\mathbf{a}_t$ dato che $\mathbf{a} = 0$). Ad un certo istante il punto raggiunge la molla che inizia a comprimersi e alla fine il punto è fermo, con la molla compressa della quantità x_c . O' conclude che sul punto, apparentemente libero, agisce invece la forza $-ma_t$, che viene bilanciata, raggiunto l'equilibrio statico, dalla forza elastica della molla: $kx_c = ma_t$.

Notiamo che dalla misura di x_c si può dedurre il valore di a_t . La molla di questo esempio, come il filo a piombo del precedente, costituisce in sostanza un *accelerometro*, che misura l'accelerazione del sistema non inerziale.

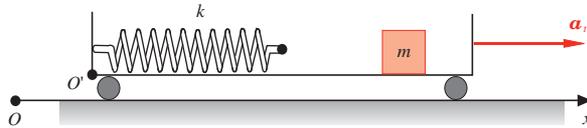


Figura 3.9

Esempio 3.6

Un sistema con origine O' e asse z' verticale è solidale ad un ascensore che si muove lungo l'asse $z \equiv z'$ di un sistema inerziale con origine in O . L'ascensore inizia a salire con accelerazione a_t , parallela e concorde all'asse z' , descrive poi un moto uniforme e infine decelera con accelerazione $-a_t$ fino a fermarsi. Se nell'ascensore si compiono esperimenti di caduta libera dei corpi, che accelerazioni \mathbf{a}' si misurano nelle tre fasi del moto?

Soluzione

Nel sistema inerziale $\mathbf{a} = \mathbf{g}$ e quindi la relazione tra le accelerazioni è

$$\mathbf{g} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_t \Rightarrow \mathbf{a}' = \mathbf{g} - \mathbf{a}_t \quad .$$

Proiettando sull'asse z' abbiamo:

$$a_t > 0 \quad a' = -g - a_t = -(g + a_t) \quad ,$$

$$a_t = 0 \quad a' = -g \quad ,$$

$$a_t < 0 \quad a' = -g - (-a_t) = -(g - a_t) \quad .$$

Nella fase di accelerazione O' constata che i corpi cadono con un'accelerazione maggiore di quella di gravità (aumento apparente di peso), nella fase uniforme anche O' misura g , nella fase di decelerazione i corpi cadono con un'accelerazione minore di g (diminuzione apparente di peso). Si riveda a questo proposito la discussione sulla sensazione di peso nel paragrafo 2.7.

Se fosse $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}$, come potrebbe accadere nella fase di decelerazione, oppure se l'ascensore scendesse in caduta libera, si troverebbe $\mathbf{a}' = 0$: un corpo abbandonato nell'ascensore con velocità iniziale nulla resta fermo rispetto ad O' . È la cosiddetta assenza di peso, avvertita da chi sta dentro l'ascensore e dovuta ovviamente non a una scomparsa reale dell'attrazione terrestre, ma al fatto che se tutto il sistema sta scendendo con la stessa accelerazione dei corpi che ad esso si riferiscono non c'è più accelerazione relativa e, tra l'altro, vengono a mancare le sensazioni ad essa connesse. Un effetto analogo, come è ben noto, si manifesta nei satelliti artificiali che ruotano intorno alla terra.

La spiegazione dell'assenza di accelerazione di gravità è quella data da O che misura in ogni caso g e ragiona in base a (3.10), attribuendo le variazioni all'accelerazione di trascinamento di O' . Ma O' , se non ha a priori questo tipo di informazioni, ragiona in modo diverso. Egli vede che in certe situazioni l'accelerazione di un corpo che cade è g , in accordo con quanto gli può essere comunicato dall'esterno, ma sperimenta anche situazioni diverse. Se si costruisce un accelerometro e lo tara opportunamente, constata che la misura fornitagli dallo strumento è proprio la correzione da apportare a g . O' postula pertanto che in certe situazioni, che è capace di mettere in evidenza, ha origine un'accelerazione supplementare che si compone con \mathbf{g} per dare i risultati osservati ovvero che alla forza peso va aggiunto il termine $-m \mathbf{a}_{\text{suppl}}$; sulle cause del fenomeno non è però in grado di fare alcuna ipotesi. Notiamo che dall'esame delle misure di \mathbf{a}' e $\mathbf{a}_{\text{suppl}}$ egli sarebbe in grado di accorgersi da solo che c'è un valore speciale, appunto g , che si ottiene sempre sommando o sottraendo i valori di \mathbf{a}' e $\mathbf{a}_{\text{suppl}}$; solo in seguito a un'informazione esterna potrebbe però accorgersi che $\mathbf{a}_{\text{suppl}}$ non è altro che \mathbf{a}_i , e che quindi egli ha un modo per mettere in evidenza cosa sta succedendo al suo sistema (se il moto di O' fosse sempre uniforme egli misurerebbe sempre g e non avrebbe alcun modo per mettere in evidenza che è in movimento).

3.5 Moto di trascinamento rotatorio uniforme

Supponiamo ora che il moto di trascinamento sia soltanto rotatorio uniforme e per comodità prendiamo coincidenti le origini dei due sistemi ($\mathbf{r} = \mathbf{r}'$). Abbiamo $\mathbf{v}_O = 0$, $\mathbf{a}_O = 0$, $\boldsymbol{\omega} = \text{costante}$, e le relazioni (3.4) e (3.7) diventano

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad (3.14)$$

Riscriviamo così (3.10):

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{centr}} + \mathbf{F}_{\text{Cor}} = m \mathbf{a}' ;$$

la *forza centrifuga*, $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, e la *forza di Coriolis*, $\mathbf{F}_{\text{Cor}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$, hanno lo stesso ruolo della forza $-m\mathbf{a}_i$ vista nel paragrafo precedente.

Il sistema inerziale O è una coppia di assi cartesiani x, y posti in un piano orizzontale e il sistema non inerziale O' un'altra coppia di assi x', y' con la stessa origine e nello stesso piano, ruotanti con velocità angolare costante $\boldsymbol{\omega}$. Si può ad esempio assumere gli assi x' e y' solidali ad un disco posto nel piano x, y che ruota rispetto ad un asse passante per il suo centro e ortogonale al piano x, y .

Se poniamo un punto materiale sul disco, con attrito nullo tra il punto e il piano del disco, il punto rimane fermo mentre il disco gira sotto il punto. Se il punto lasciasse una traccia, osserveremmo una circonferenza di raggio r , con centro nell'origine comune dei due sistemi.

Forza centrifuga
Forza di Coriolis

Per l'osservatore O il punto è in quiete, mentre per quello ruotante O' il punto descrive un moto circolare uniforme, in base a (3.13) e (3.14). Infatti nei due sistemi il moto del punto ha queste caratteristiche:

$$\text{sistema } O \quad \mathbf{v} = 0 \quad , \quad \mathbf{a} = 0$$

$$\text{sistema } O' \quad \mathbf{v}' = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times (-\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

Pertanto nel sistema O' accelerato il punto descrive una circonferenza in verso contrario al moto del disco, con velocità costante in modulo e pari a ωr e con accelerazione, puramente centripeta, di valore $\omega^2 r$ (in figura 3.10 è mostrata la traiettoria che è percorsa in senso orario in quanto il disco ruota in senso antiorario). Però O' deve ipotizzare che sul punto agiscono due forze (centrifuga e di Coriolis) le quali, combinandosi, comunicano al punto l'accelerazione \mathbf{a}' ; resta per O' il problema dell'origine di queste forze.

Leghiamo ora il punto con un filo all'asse di rotazione e diamogli una velocità di modulo ωr in modo tale che ruoti con la stessa velocità del punto del disco su cui si trova. La situazione è opposta a quella precedente: per O il punto descrive un moto circolare uniforme sotto l'azione della tensione del filo, mentre O' vede il punto fermo, $\mathbf{v}' = 0$ e $\mathbf{a}' = 0$; tutto ciò è in accordo con (3.13) e (3.14). Però O' osserva pure che il filo è teso malgrado il punto sia fermo e quindi è costretto a supporre che sul punto agisca una forza diretta verso l'esterno, che chiama forza centrifuga, bilanciata dalla tensione del filo.

Per verificare la sua ipotesi O' traccia un segno radiale sul disco e recide il legame tra il punto e l'origine degli assi, immaginando di vedere il punto allontanarsi radialmente sotto l'azione della forza centrifuga, in quanto è stata annullata la forza esercitata dal filo. In effetti O' osserva ora un moto del punto materiale, però lungo una traiettoria curvilinea, e deve quindi ammettere, come già fatto per il primo esempio, che sui punti in moto nel suo sistema di riferimento ($\mathbf{v}' \neq 0$) agisca un'altra forza che non si manifesta quando sono in quiete; si tratta precisamente della forza di Coriolis. È chiaro che O dà un'altra interpretazione dell'ultima fase dell'esperimento, cioè dopo il taglio del filo. Infatti nel sistema inerziale il punto materiale all'istante in cui viene lasciato libero inizia a muoversi di moto rettilineo uniforme con direzione tangente alla circonferenza nella posizione in cui avviene il distacco dal vincolo (filo). Le accelerazioni nei due sistemi sono:

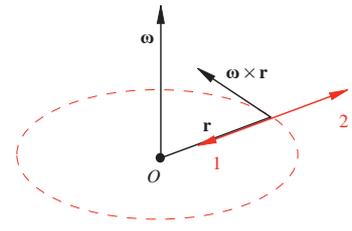
$$\mathbf{a} = 0 \quad , \quad \mathbf{a}' = -\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad .$$

Il problema che si presenta ad O' è sempre la comprensione dell'origine della forza centrifuga e di quella di Coriolis.

La figura 3.11 mostra le posizioni del punto libero viste dai due osservatori negli istanti zero, $T/12$, $T/6$, $T/4$ se T è il periodo di rotazione del disco, ovvero del sistema non inerziale.

Riprendiamo ora in esame il problema del *pendolo conico*, discusso nel terzo esempio del paragrafo 2.13, considerando un sistema con origine sull'asse verticale e ruotante con la stessa velocità angolare del pendolo. In questo sistema, non inerziale, il pendolo è immobile e forma con la verticale l'angolo θ tale che $\text{tg } \theta = \omega^2 r/g$. Siamo in una situazione di equilibrio statico, che necessita l'introduzione di una forza che bilanci la risultante della tensione del filo e del peso. Tale forza è la forza centrifuga, che esiste solo in questo sistema, e vale $\mathbf{F}_{\text{centr}} = -m g \text{tg } \theta \mathbf{u}_N = -m \omega^2 r \mathbf{u}_N$; \mathbf{u}_N è un versore orizzontale diretto verso l'asse attorno a cui ruota il pendolo.

Notiamo che se il moto di trascinamento è rotatorio, uniforme o vario, è sempre $\mathbf{a}_r \neq 0$ e quindi non può mai sussistere l'eguaglianza $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$. Non esiste cioè l'analogo rotatorio della relatività galileiana: in un sistema rotante è sempre possibile mettere in evidenza la rotazione (e più in generale in un sistema non inerziale l'accelerazione \mathbf{a}_r), cioè accorgersi di essere in movimento.



- 1 $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$
- 2 $-\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

Figura 3.10

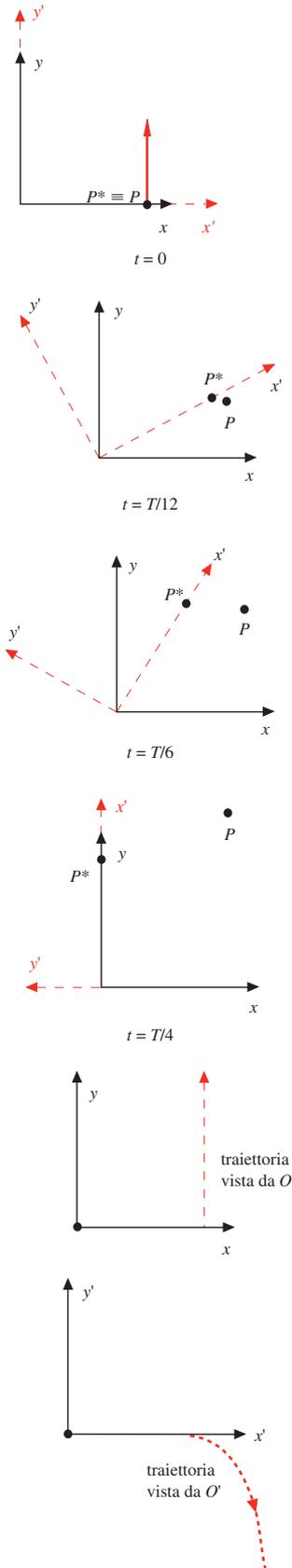


Figura 3.11

A conclusione della serie di esempi di questo paragrafo e dei precedenti, vogliamo brevemente riprendere l'argomento delle forze d'inerzia. Da una parte dobbiamo ripetere che esse non hanno esistenza reale in quanto non derivano dalle interazioni fondamentali e non compaiono nella descrizione del moto effettuata in un sistema di riferimento inerziale. Per altro in un sistema non inerziale esse rappresentano effetti genuini e sono necessarie per spiegare le osservazioni sperimentali. Ad esempio, in un sistema rotante è corretto attribuire alla forza centrifuga la tendenza allo spostamento radiale verso l'esterno e alla forza di Coriolis l'incurvamento della traiettoria osservata, in un veicolo che accelera o rallenta lo spostamento all'indietro o in avanti è reale e si spiega solo con la forza $-m\mathbf{a}_l$. La cosa importante è avere ben chiara l'origine di tali forze apparenti, utilizzarle correttamente dove appropriato e non estendere la loro esistenza ai sistemi inerziali.

Esempio 3.7

Un cilindro cavo, di raggio $R = 2$ m, ruota rispetto al proprio asse verticale con velocità angolare ω . Un corpo poggiato contro la parete interna del cilindro ruota insieme ad esso, ma non cade. Se il coefficiente di attrito statico tra corpo e parete del cilindro è $\mu_s = 0.7$, calcolare il valore minimo che deve avere ω .

Soluzione

Risolviamo prima il problema in un sistema inerziale fisso al suolo (si veda l'esempio 2.10). La reazione N della parete, dovuta al fatto che il corpo tendendo a proseguire in linea retta preme sulla parete, è la forza centripeta che permette la rotazione del corpo, $N = m\omega^2 R$. Dato che il corpo non cade deve essere

$$mg \leq \mu_s N = \mu_s m\omega^2 R$$

$$\Rightarrow \omega^2 \geq \frac{g}{\mu_s R} \quad , \quad \omega \geq 2.6 \text{ rad/s.}$$

Nel sistema rotante solidale al cilindro il corpo è in equilibrio statico, sia orizzontale che verticale. Orizzontalmente esso è sottoposto alla reazione N e alla forza centrifuga $m\omega^2 R$, che devono essere eguali in modulo (e sono opposte in verso); verticalmente la condizione è quella già scritta nel sistema inerziale (non c'è accelerazione di trascinamento verticale). Si trova ovviamente lo stesso risultato, ma bisogna introdurre la forza centrifuga, che non esiste nel sistema inerziale.

3.6 Il moto rispetto alla terra

Nei paragrafi precedenti abbiamo introdotto la nozione di sistema inerziale senza però darne un esempio: lo facciamo adesso, dicendo che un sistema di riferimento con l'origine nel centro di massa del sistema solare e gli assi diretti verso determinate *stelle fisse* è con ottima approssimazione un sistema inerziale, come lo sono tutti gli altri sistemi in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso. La verifica è data dal fatto che, entro gli errori sperimentali, in tali sistemi vale la legge di Newton (2.1) con tutte le sue conseguenze; in particolare risultano accuratissime le previsioni sul moto dei vari corpi celesti e dei satelliti artificiali.

Di norma le misure vengono fatte in un riferimento terrestre: ora, qualsiasi riferimento solidale alla terra, per esempio con un asse diretto come l'asse terrestre e gli altri due nel piano dell'equatore, ruota insieme alla terra e non è inerziale; anche un sistema con origine nel centro della terra e assi sempre paralleli a quelli dei sistemi inerziali di cui sopra non è inerziale in quanto si muove di moto traslatorio accelerato (la traiettoria dell'origine è curvilinea). Quindi nelle misure terrestri com-

paiono termini correttivi dovuti alle forze apparenti ed è conveniente riferire tali misure, attraverso note formule di trasformazione, a un sistema inerziale (si sa, per esempio, che il moto dei pianeti visto dalla terra è molto complicato). Le correzioni hanno un'importanza che è in relazione con le misure e con la precisione voluta: nel caso di misure astronomiche sono fondamentali, come pure nei moti terrestri su notevoli distanze; per tempi e percorsi brevi possono essere trascurabili in assoluto o rispetto ad altri effetti più importanti, come l'attrito dell'aria.

Dato che intendiamo descrivere e valutare quantitativamente gli effetti dovuti al moto della terra, cominciamo col fornire alcuni dati numerici. Approssimiamo la terra ad una sfera che compie un moto di rivoluzione attorno al sole lungo un'orbita ellittica, che praticamente coincide con una circonferenza, ed un moto di rotazione su se stessa. I dati caratteristici delle proprietà fisiche della terra e dei due moti, rivoluzione e rotazione, sono riportati nella tabella che segue.

La velocità e l'accelerazione di un punto P alla superficie della terra (si veda figura 3.12) sono

$$v(P) = \omega r = \omega R \cos\theta = 4.64 \cdot 10^2 \cos\theta \text{ m/s} ,$$

$$a(P) = \omega^2 r = \omega^2 R \cos\theta = 3.38 \cdot 10^{-2} \cos\theta \text{ m/s}^2 .$$

In particolare, per un punto all'equatore

$$v = 4.64 \cdot 10^2 \text{ m/s} = 1671 \text{ km/h} ,$$

$$a = 3.38 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2 .$$

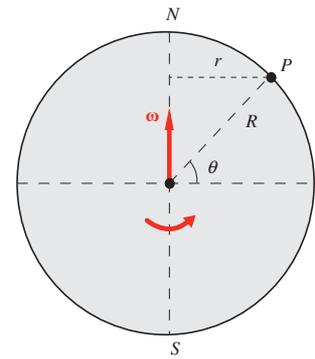


Figura 3.12

Tabella 3.1 Dati sul moto della terra

massa della terra	m_T	$5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
raggio della terra	R	$6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$
raggio dell'orbita	R_0	$1.49 \cdot 10^{11} \text{ m}$
periodo di rivoluzione	T_0	$3.16 \cdot 10^7 \text{ s}$
velocità di rivoluzione	$v_0 = \frac{2\pi R_0}{T_0}$	$2.96 \cdot 10^4 \text{ m/s} = 106655 \text{ km/h}$
velocità angolare di rivoluzione	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$	$1.99 \cdot 10^{-7} \text{ rad/s}$
accelerazione centripeta di rivoluzione	$a_0 = \omega_0^2 R_0$	$5.88 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$
periodo di rotazione	T	$8.64 \cdot 10^4 \text{ s}$
velocità angolare di rotazione	$\omega = \frac{2\pi}{T}$	$7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$

Un sistema di riferimento solidale alla terra, con asse z orientato da sud a nord e assi x, y nel piano equatoriale, ruota con velocità angolare $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{u}_z$, essendo \mathbf{u}_z il versore dell'asse z e $\omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$.

Un punto in moto vicino alla superficie terrestre è sottoposto alla forza peso $m \mathbf{g}_0$ e in base a (3.7)

$$\mathbf{g}_0 = \mathbf{g} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

dove \mathbf{g} e \mathbf{v} sono rispettivamente l'accelerazione e la velocità misurate nel sistema solidale alla terra. Abbiamo trascurato l'accelerazione centripeta del centro della terra, dovuta al moto di rivoluzione. Pertanto l'accelerazione di gravità misurata dal sistema terrestre è data da

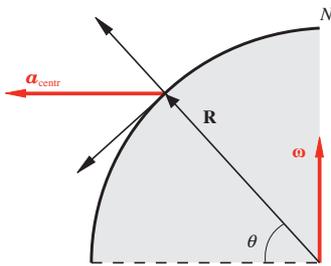


Figura 3.13

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 - \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) - 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Il termine centrifugo è ortogonale all'asse z di rotazione e diretto verso l'esterno, in entrambi gli emisferi. Esso vale in modulo, come già calcolato, $3,38 \cdot 10^{-2} \cos^2 \theta$ m/s². Le due componenti, radiale (parallela e concorde a \mathbf{R}) e trasversa (diretta sempre verso l'equatore) valgono rispettivamente

$$a_R = 3,38 \cdot 10^{-2} \cos^2 \theta \quad , \quad a_\theta = 3,38 \cdot 10^{-2} \cos \theta \sin \theta \text{ m/s}^2 \quad .$$

La correzione centrifuga all'accelerazione di gravità è nulla al polo, dove \mathbf{R} e $\boldsymbol{\omega}$ sono paralleli, e massima all'equatore, dove sono ortogonali. Gli effetti sono la diminuzione (piccola) del valore di \mathbf{g}_0 con dipendenza dalla latitudine θ e l'alterazione della verticale determinata con il filo a piombo; ad esempio per $\theta = 45^\circ$ la deviazione è dell'ordine di $0,1^\circ$.

L'effetto del termine di Coriolis è più complicato in quanto dipende dalla velocità \mathbf{v} del punto rispetto al sistema solido con la terra.

Se per esempio consideriamo un punto che cade da un'altezza h , con velocità iniziale nulla, l'azione della forza centrifuga comporta uno spostamento verso l'equatore lungo un meridiano; invece la forza di Coriolis, tangente a un parallelo e rivolta come in figura 3.14, provoca uno spostamento verso oriente in entrambi gli emisferi. L'effetto complessivo è la combinazione dei due.

Si trova che le due deviazioni rispetto al piede della verticale vera sono

$$x_{\text{centr}} = 3,45 \cdot 10^{-3} h \cos \theta \sin \theta \text{ m} \quad ,$$

$$x_{\text{Cor}} = 2,2 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos \theta \text{ m} \quad .$$

Con $h = 100$ m e $\theta = 45^\circ$, $x_{\text{centr}} \cong 17,3$ cm , $x_{\text{Cor}} \cong 1,6$ cm .

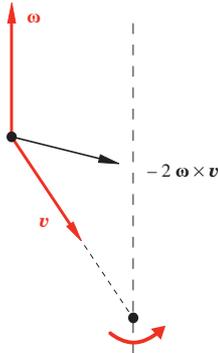


Figura 3.14

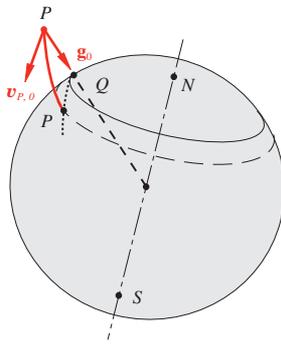


Figura 3.15

Qual è la spiegazione inerziale degli effetti misurati? Il punto P che cade dall'altezza h ($= PQ$) ha velocità iniziale $\mathbf{v}_{P,0}$, in quanto all'istante $t = 0$ sta ruotando insieme alla terra, e accelerazione \mathbf{g}_0 . Il moto avviene nel piano individuato da $\mathbf{v}_{P,0}$ e \mathbf{g}_0 , la cui intersezione con la superficie terrestre è indicata in figura 3.15 dalla linea punteggiata; PP rappresenta la traiettoria del punto. La velocità iniziale è tangente a un parallelo, però durante la caduta non c'è nessun vincolo che tenga il punto su una traiettoria circolare e perciò esso si sposta verso l'equatore, come è chiaro dalla figura. Inoltre poiché P è inizialmente a una distanza dall'asse di rotazione maggiore di quella di Q , esso ha velocità maggiore di Q e quindi cade più a est di Q . Correttamente interpretati, questi effetti mettono in evidenza la rotazione terrestre.

Un effetto più vistoso a prova della rotazione terrestre è quello mostrato dal pendolo di Foucault. Immaginiamo di fare oscillare un pendolo semplice al polo: il moto è contenuto nel piano \mathbf{g}_0, \mathbf{v} , fisso in un sistema inerziale; però dalla terra, sistema non inerziale, si vede ruotare il piano di oscillazione del pendolo, a causa della forza di Coriolis. Un giro completo dura 24 ore. Se il pendolo lasciasse una traccia sul suolo si vedrebbero le linee disegnate in figura 3.16. Naturalmente l'esperimento è stato eseguito alle nostre latitudini, ma l'effetto è lo stesso anche se un giro completo viene compiuto in un tempo che dipende dalla latitudine.

È interessante osservare che i primati di lancio del giavellotto o del disco, a parità di condizioni atmosferiche e di attrito dell'aria, sono influenzati in modo non trascurabile dalla forza centrifuga e di Coriolis.

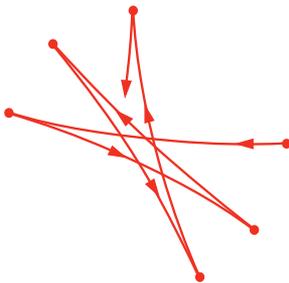


Figura 3.16

3.7 Commenti e note

Raccogliamo in questo paragrafo alcuni commenti e delle note che altrimenti avrebbero appesantito il testo.

Una caratteristica importante di (3.1), (3.4), (3.7) è di essere relazioni vettoriali e quindi valere intrinsecamente. Però ciascuna si può tradurre in tre relazioni tra le componenti dei vari vettori in un determinato sistema di riferimento, che deve essere lo stesso per tutti i termini. Se per esempio si sceglie il sistema O tutte le componenti dei termini con l'apice

$(\mathbf{r}', \mathbf{v}', \mathbf{a}')$ vanno riferite al sistema O e quindi è necessario stabilire le relazioni di trasformazione che permettono di passare dalle coordinate valide in O' a quelle valide in O .

La semplicità della geometria della figura 3.2, scelta per il moto relativo traslatorio, rende le formule di trasformazione praticamente immediate e di facile uso. In particolare, il fatto che gli assi dei sistemi siano paralleli tra loro ha come conseguenza che le componenti di un vettore siano le stesse nei due sistemi; ad esempio la componente v'_x del vettore velocità \mathbf{v}' è eguale alla componente v_x (si veda il paragrafo C.2 dell'appendice C). Se il sistema O' avesse gli assi ruotati rispetto a quelli di O , con l'angolo tra assi omologhi costante durante il moto, le formule di trasformazione sarebbero più complicate, pur restando le conclusioni generali le stesse. Sempre con riferimento a \mathbf{v}' e alla relazione $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + \mathbf{v}'$, nota la componente v'_x , si dovrebbe trasformarla in v_x e solo allora scrivere $v_x = v_{O',x} + v'_x$, proiezione della relazione vettoriale sull'asse x del sistema O .

Facciamo un esempio esplicito non per un moto relativo traslatorio, ma per il moto rotatorio dei due sistemi del paragrafo 3.5: gli assi di O' ruotano a rispetto a quelli di O con velocità angolare costante ω e l'angolo tra x' e x è $\theta = \omega t$: la (3.1) si riduce a $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$. Ciò non vuol dire che valgono le relazioni $x = x', y = y'$, manifestamente false e concettualmente sbagliate perché eguagliano le componenti viste da due diversi sistemi. Le relazioni corrette sono $r_x = r'_x \cos \theta - r'_y \sin \theta$, $r_y = r'_x \sin \theta + r'_y \cos \theta$, cioè

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \omega t - y' \sin \omega t \quad , \\ y &= x' \sin \omega t + y' \cos \omega t \quad , \end{aligned}$$

con il che l'eguaglianza è espressa nel sistema O , oppure passando nel sistema O' $r'_x = r_x \cos \theta + r_y \sin \theta$, $r'_y = -r_x \sin \theta + r_y \cos \theta$, cioè

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \omega t + y \sin \omega t \quad , \\ y' &= -x \sin \omega t + y \cos \omega t \quad . \end{aligned}$$

Queste formule di trasformazione esprimono il legame tra le coordinate di uno stesso punto nei due sistemi (ottenuti uno dall'altro tramite una rotazione nel piano x, y). Esse valgono anche per le componenti di un qualsiasi altro vettore. Notiamo esplicitamente, e lo si verifica subito, che una rotazione lascia invariato il modulo di un vettore.

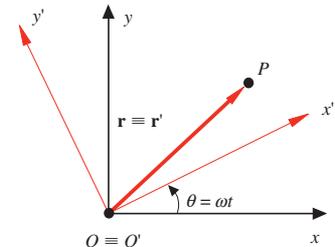


Figura 3.17

Si è già rivelato nella dimostrazione del teorema delle velocità relative (3.4) che $d\mathbf{r}'/dt$ non è \mathbf{v}' ; analogamente dv'/dt non è \mathbf{a}' . Questo perché i versori $\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_y, \mathbf{u}_z$ sono variabili nel tempo, rispetto a O . L'osservatore O' trova però l'usuale cinematica: nel suo sistema

$$\mathbf{a}' = dv'/dt \quad \text{e} \quad \mathbf{v}' = d\mathbf{r}'/dt \quad ;$$

non gli torna invece che $\mathbf{a} = dv/dt$ e $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

La quarta relazione fondamentale, oltre alle tre citate sopra, è (3.10), che permette di estendere la legge di Newton ai sistemi non inerziali. Questa però è l'unica estensione che ci limitiamo a fare; cioè non cercheremo di sviluppare in un generico sistema lo studio della dinamica del punto, come già fatto in un sistema inerziale partendo da (2.1). La procedura da seguire piuttosto è di trasformare le misure eseguite in un sistema non inerziale riferendole a un sistema inerziale e, a questo punto, interpretarle con le leggi note.

Anche tutti i successivi sviluppi della teoria (sistemi di punti e corpi rigidi) verranno ambientati naturalmente in sistemi di riferimento inerziali, con una sola importante eccezione: troveremo significativo in qualche caso riferire il moto anche al cosiddetto sistema di riferimento del centro di massa, che in generale non è un sistema inerziale. Avremo allora modo di applicare il formalismo sviluppato in questo capitolo.

Nota sulla composizione di moti

Le operazioni essenzialmente formali di scomposizione del moto di un punto in tre moti rettilinei lungo gli assi e viceversa, che abbiamo visto nel primo capitolo, trovano applicazione nell'ambito del moto relativo, anche se il contesto fisico è diverso. Il moto rispetto a O può sempre essere pensato come composizione del moto relativo rispetto a O' e del moto di trascinamento di O' rispetto a O .

Un esempio tipico è quello di una barca che attraversa un fiume e viene trasportata dalla corrente. Supponiamo che il fiume sia rettilineo e largo d , che la velocità della corrente sia \mathbf{v}_F (velocità del moto di trascinamento, costante), che la barca si muova sempre ortogonalmente a \mathbf{v}_F con velocità \mathbf{v}_B costante (relativa al sistema O' che si sposta con la corrente).

Se la barca parte dal punto A , quanto a valle si trova il punto B di arrivo? Il tempo di attraversamento si calcola più facilmente nel sistema O' e vale d/v_B ; in questo tempo la corrente percorre il tratto $b = (d/v_B)v_F$ e ciò risponde alla domanda. La traiettoria della barca rispetto a O , solidale alle rive, è un segmento lungo $\sqrt{d^2 + b^2}$ che forma con la corrente l'angolo $\theta = \arctg(v_B/v_F)$; la velocità rispetto a O è $\sqrt{v_B^2 + v_F^2}$.

Note sulle formule di Poisson

Scriviamo le componenti cartesiane del vettore $d\mathbf{u}_x/dt$ come proiezioni del vettore stesso sugli assi:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z .$$

Il primo termine però è nullo perché, come abbiamo già ricavato più volte, $\frac{d\mathbf{u}_x}{dt}$ è

ortogonale a \mathbf{u}_x . Ragionando allo stesso modo per $\frac{d\mathbf{u}_y}{dt}$ e $\frac{d\mathbf{u}_z}{dt}$ abbiamo:

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y + \left(\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z \right) \mathbf{u}_z ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x \right) \mathbf{u}_x + \left(\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y \right) \mathbf{u}_y .$$

Le sei componenti non sono indipendenti, ma eguali in modulo a due a due; infatti derivando la $\mathbf{u}_x \cdot \mathbf{u}_y = 0$ si ricava

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y = - \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_x ;$$

analogamente

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x , \quad \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z = - \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_y .$$

Definiamo il vettore $\boldsymbol{\omega}$ che ha come componenti i tre termini indipendenti:

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{u}_y}{dt} \cdot \mathbf{u}_z , \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{u}_z}{dt} \cdot \mathbf{u}_x , \quad \omega_z = \frac{d\mathbf{u}_x}{dt} \cdot \mathbf{u}_y .$$

Dalle proprietà del prodotto vettoriale (appendice C) ricaviamo infine

$$\frac{d\mathbf{u}_x}{dt} = \omega_z \mathbf{u}_y - \omega_y \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_x ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_y}{dt} = -\omega_z \mathbf{u}_x + \omega_x \mathbf{u}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_y ,$$

$$\frac{d\mathbf{u}_z}{dt} = \omega_y \mathbf{u}_x - \omega_x \mathbf{u}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{u}_x & \mathbf{u}_y & \mathbf{u}_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}_z .$$

Vediamo così che esiste un vettore $\boldsymbol{\omega}$ tramite il quale si possono scrivere tutte e tre le derivate. La dimostrazione è valida per qualsiasi terna cartesiana trirettangola e quindi in particolare per il sistema O' .

Nota sui sistemi di riferimento in coordinate polari

Nella descrizione del moto piano in coordinate polari il punto P è individuato dalla distanza r dal polo O e dall'angolo θ formato da \mathbf{r} con un asse di riferimento. Chiamiamo fisso il sistema x, y e mobile il sistema definito dai versori \mathbf{u}_r e \mathbf{u}_θ , che rispetto al sistema fisso ruota con velocità angolare $\omega = d\theta/dt$. Una caratteristica di questo sistema mobile è che il punto P si trova sempre sull'asse x' , per cui il moto relativo è rettilineo con

$$\mathbf{v}' = \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r \quad , \quad \mathbf{a}' = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r \quad .$$

Confrontando le espressioni in notazione polare per la velocità (1.19) e l'accelerazione (1.23), introdotte nel primo capitolo, e le relazioni (3.4) e (3.7), ci accorgiamo che sono identiche. Infatti

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{u}_\theta = \mathbf{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a} &= \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{u}_r - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{u}_r + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{u}_\theta + 2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{dt} \mathbf{u}_\theta = \\ &= \mathbf{a}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' \quad . \end{aligned}$$

In effetti il moto piano in coordinate polari è riferito ad un particolare sistema mobile e quindi, per essere riferito al sistema fisso x, y , deve obbedire ai teoremi del moto relativo.

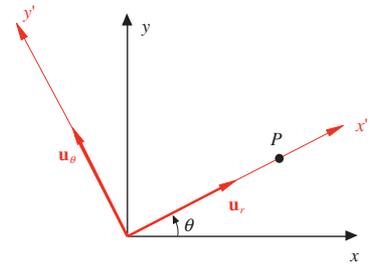


Figura 3.18

3.8 Teoria della relatività. Trasformazioni di Lorentz

La proprietà più notevole che abbiamo trovato studiando il moto relativo è la relatività galileiana, che ora riformuliamo così: le leggi della meccanica sono invarianti rispetto alle trasformazioni tipo (3.11), che legano le coordinate di due sistemi di riferimento in moto rettilineo uniforme l'uno rispetto all'altro. Un fenomeno osservato e spiegato in un sistema ha la stessa spiegazione dinamica nell'altro: la cinematica è diversa perché diverse sono le condizioni iniziali, ma la legge fisica è la stessa, nella sostanza e nella struttura. Da ciò segue tra l'altro che con esperimenti di meccanica compiuti in sistemi inerziali non è possibile mettere in evidenza se il sistema di riferimento è in moto o è in quiete, fatto rilevato già da Galileo.

Nella seconda metà dell'ottocento diverse circostanze portarono a una crisi del principio di relatività galileiano. I fenomeni elettrici e magnetici vennero inquadrati nella teoria dell'elettromagnetismo di Maxwell, che incluse in questo contesto anche i fenomeni luminosi; le equazioni di Maxwell risultarono però non invarianti rispetto alle trasformazioni galileiane. Inoltre nel 1887 venne provato sperimentalmente da Michelson e Morley che la velocità c della luce nel vuoto ha lo stesso valore in qualsiasi sistema di riferimento inerziale, cioè non si compone con la velocità di trascinamento dando per esempio $c + v$ o $c - v$, come vorrebbero le trasformazioni galileiane delle velocità.

La soluzione venne proposta da Einstein nel 1905; egli estese il principio di relatività, assumendo che tutte le leggi della Fisica siano invarianti quando considerate in diversi sistemi di riferimento inerziali e che quindi con nessun esperimento sia possibile mettere in evidenza il moto del sistema di riferimento. In particolare devono essere invarianti le equazioni di Maxwell e la legge sperimentale secondo cui la velocità della luce nel vuoto vale sempre c , indipendentemente dal moto della sorgente e dell'osservatore. La trasformazione di coordinate tra due sistemi inerziali che permette di soddisfare tali richieste non può essere del tipo (3.11), ma risulta, nel caso semplice della figura 3.2 e indicando con v_0 la velocità costante di trascinamento,

$$\begin{aligned} x' &= \gamma_0 (x - v_0 t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma_0 \left(t - \frac{v_0}{c^2} x \right) \end{aligned} \qquad \gamma_0 = \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} \quad (3.15)$$

Il valore di c , velocità della luce nel vuoto, è con ottima approssimazione $3 \cdot 10^8$ m/s.

Un fenomeno che avviene nel sistema O in un punto di coordinate x, y, z al tempo t , ovvero, come si suol dire, un *evento* caratterizzato da x, y, z, t , viene osservato dal sistema O' , in moto con velocità v_0 , nel punto di coordinate x', y', z' al tempo t' . Il fatto più notevole sta nella quarta relazione: nelle (3.11) si assumeva implicitamente $t = t'$, cioè che il tempo fosse assoluto, ora invece *anche il tempo ha un valore relativo al sistema di riferimento*.

Le (3.15) costituiscono una *trasformazione di Lorentz* e furono scritte da Lorentz molto prima del 1905, quando egli si pose il problema matematico di trovare quali fossero le trasformazioni di coordinate tra due sistemi inerziali che rendessero invarianti le equazioni di Maxwell. Einstein ne comprese il significato profondo e le pose alla base della teoria della relatività (detta ristretta o speciale).

La trasformazione di Lorentz è dunque la trasformazione di coordinate spaziali e temporali più generale che lega le osservazioni fatte in due diversi sistemi inerziali; l'invarianza rispetto ad una trasformazione di Lorentz è un requisito fondamentale che, in base al principio di relatività, deve possedere qualsiasi legge fisica. Come si è detto, le equazioni di Maxwell possiedono questo requisito e vedremo tra breve che anche il valore c della velocità della luce nel vuoto è preservato da una trasformazione di Lorentz.

Invece la seconda legge di Newton, che abbiamo utilizzato per la descrizione della dinamica del punto materiale, non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz. Questo fatto però non le toglie validità, ne limita soltanto il campo di applicabilità. In effetti la meccanica newtoniana, sia quella studiata finora che quella contenuta nei prossimi capitoli, e le trasformazioni galileiane rispetto alle quali essa è invariante, sono perfettamente adeguate alla descrizione dei fenomeni meccanici ordinari, che coinvolgono corpi macroscopici aventi velocità molto inferiori a quelle della luce; del resto, è proprio dalla sperimentazione compiuta sul

moto di questi corpi che le leggi della meccanica sono state ricavate. Non è però lecita l'estensione a fenomeni che comportino velocità prossime o eguali a quella della luce, come risultò verso la fine dell'ottocento e come si verifica facilmente operando con particelle microscopiche a livello atomico e nucleare. In queste situazioni occorre ridefinire la quantità di moto e l'energia e utilizzare la legge del moto $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$; accenneremo brevemente a questa meccanica relativistica nel successivo paragrafo. Caratteristica saliente della nuova formulazione è che essa riproduce, quando trattiamo i fenomeni ordinari, la formulazione newtoniana: infatti, se v_0 è molto minore di c , γ_0 vale a tutti gli effetti 1, v_0/c^2 vale zero e le (3.15) diventano le (3.11); analogamente le grandezze relativistiche, definite per qualsiasi velocità, si riconducono alle usuali grandezze meccaniche per piccole velocità.

Vediamo adesso alcune prime conseguenze delle (3.15).

Trasformazione delle velocità

Nel sistema di origine O la velocità di un punto materiale ha le componenti dx/dt , dy/dt , dz/dt ; nel sistema O' si hanno le componenti dx'/dt' , dy'/dt' , dz'/dt' . Dalla prima e dalla quarta delle (3.15) ricaviamo

$$dx' = \gamma_0 (dx - v_0 dt) = \gamma_0 dt \left(\frac{dx}{dt} - v_0 \right) = \gamma_0 dt (v_x - v_0) \quad ,$$

$$dt' = \gamma_0 \left(dt - \frac{v_0}{c^2} dx \right) = \gamma_0 dt \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right) \quad ,$$

$$\frac{dx'}{dt'} = v_x' = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \quad .$$

Per le altre due componenti si procede allo stesso modo e il risultato per le relazioni tra le componenti della velocità di un punto misurate nei due diversi sistemi è

$$\begin{aligned} v_x' &= \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \\ v_y' &= \frac{v_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \\ v_z' &= \frac{v_z}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x \right)} \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Notiamo subito che se $v_0 \ll c$ le (3.16) danno le (3.12).

Applichiamo le (3.16) al caso limite di un segnale luminoso che si propaga lungo l'asse x con velocità c ($v_x = c$, $v_y = v_z = 0$); risulta

$$v_x' = \frac{c - v_0}{1 - \frac{v_0}{c}} = c \quad , \quad v_y' = v_z' = 0 \quad ,$$

e quindi nel sistema O' , in moto con velocità v_0 rispetto a O , si misura la stessa velocità c , qualunque sia il valore di v_0 .

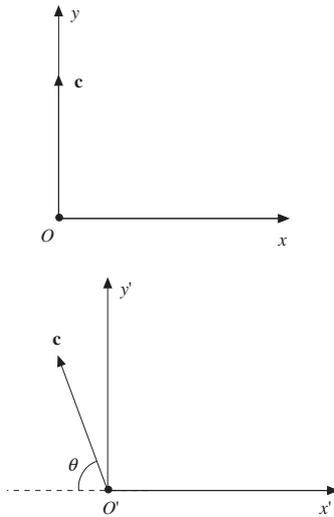


Figura 3.19 (Esempio 3.8)

Esempio 3.8

Nel sistema O si osserva un raggio luminoso che si propaga lungo l'asse y con velocità c ; determinare cosa si osserva nel sistema O' che si sposta rispetto ad O con velocità v_0 .

Soluzione

Applichiamo le relazioni (3.16) con $v_x = v_z = 0$, $v_y = c$:

$$v'_x = -v_0, \quad v'_y = \frac{c}{\gamma_0}, \quad v'_z = 0.$$

Pertanto nel sistema O' la luce ha velocità

$$\sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \frac{c}{\gamma_0} \sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2} \gamma_0^2} = c$$

e la sua traiettoria forma con l'asse $x' \equiv x$ un angolo θ tale che

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v'_y}{v'_x} = -\frac{c}{\gamma_0 v_0} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{\gamma_0}, \quad \operatorname{cos} \theta = \frac{v_0}{c}.$$

Più in generale, ponendo $v_x = c \cos \phi$, $v_y = c \operatorname{sen} \phi$, $v_z = 0$, cioè considerando una traiettoria della luce nel piano x, y , si trova facilmente che $v'^2_x + v'^2_y = c^2$ ed eguale risultato si ottiene nel caso tridimensionale.

Abbiamo così verificato che *le trasformazioni di Lorentz garantiscono la costanza del valore c in qualsiasi sistema inerziale*. È solo la direzione del raggio luminoso che appare diversa in ciascun sistema.

Come secondo esempio consideriamo il moto di punti materiali con velocità prossima a quella della luce.

Esempio 3.9

Due elettroni si muovono nel sistema O , uno con velocità $0.7c$ concorde all'asse x e l'altro con velocità $0.5c$ discorde all'asse x . Qual è la velocità relativa?

Soluzione

Prendiamo come sistema O' quello in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $0.7c$; in questo sistema la velocità del secondo elettrone è appunto la velocità relativa al primo. Abbiamo $v_0 = 0.7c$, $v_x = 0.5c$ (e $v_y = v_z = 0$). Pertanto

$$v'_x = \frac{-0.5c - 0.7c}{1 + \frac{0.7c \cdot 0.5c}{c^2}} = -\frac{1.2c}{1.35} = -0.89c.$$

La trasformazione classica (3.12) ci avrebbe dato $-1.2c$, invece la trasformazione relativistica dà un risultato che in modulo è minore di c (se invece O' fosse il sistema in cui è in quiete l'elettrone avente velocità $-0.5c$, troveremmo $v'_x = 0.89c$, cioè lo stesso risultato). È facile verificare che v'_x resta in modulo sempre minore di c se v_x e v_0 sono entrambe minori di c .

La conclusione raggiunta nell'esempio 3.9 può essere estesa nel modo seguen-

te: quando si compone la velocità di un punto materiale con quella di un sistema di riferimento, ovvero si osserva il moto da un diverso sistema di riferimento, non si ottiene mai un valore maggiore o eguale a c se le velocità del punto e del sistema sono entrambi minori di c .

Questo fatto va visto insieme ad un'altra circostanza fondamentale: dall'espressione di $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$, che partendo dal valore unitario assunto per $v_0 = 0$ cresce all'aumentare di v_0 e tende all'infinito per v_0 tendente a c (con $v_0 > c$ γ_0 assumerebbe un valore immaginario), si capisce che *la velocità della luce appare come un valore limite non raggiungibile*. Per valori di v_0 maggiori di c le (3.15) perderebbero significato e lo stesso succederebbe, come vedremo nel prossimo paragrafo, anche per la quantità di moto e l'energia di un punto materiale.

Siccome noi possiamo sempre pensare che il sistema O' sia quello in cui è in quiete un punto materiale che ha velocità v_0 rispetto al sistema O , deduciamo in definitiva che *la velocità di un punto materiale è sempre inferiore a c , in qualsiasi sistema di riferimento inerziale* (essa può però essere molto vicina a c : la velocità raggiunta dagli elettroni accelerati nella macchina LEP del CERN è inferiore a c di circa $3 \cdot 10^{-10}$ m/s).

Un caso speciale è costituito dalla luce stessa, che ha velocità c in qualsiasi sistema inerziale, come abbiamo verificato; pertanto non esiste un sistema inerziale in cui la velocità della luce è eguale a zero.

Accanto alle trasformazioni da O a O' vanno considerate le trasformazioni inverse da O' a O ; si tratta di ricavare x, y, z, t in funzione di x', y', z', t' nelle (3.15) e di procedere in modo analogo nelle (3.16). Si trova

$$\begin{aligned}
 x &= \gamma_0 (x' + v_0 t') & v_x &= \frac{u'_x + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x} \\
 y &= y' & v_y &= \frac{u'_y}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)} \\
 z &= z' & v_z &= \frac{u'_z}{\gamma_0 \left(1 + \frac{v_0}{c^2} u'_x\right)} \\
 t &= \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'\right)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

e si nota che le trasformazioni inverse hanno la stessa struttura, semplicemente v_0 è diventata $-v_0$, come era prevedibile a priori.

Trasformazione delle accelerazioni

Per trovare le formule secondo cui si trasforma l'accelerazione cominciamo dalle componenti $a_x = dv_x/dt$ e $a'_x = du'_x/dt'$. Abbiamo già visto che $dt' = \gamma_0 dt (1 - v_0 v_x/c^2)$; dalla prima delle (3.16) ricaviamo

$$dv'_x = \frac{dv_x}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} + \frac{(v_x - v_0) v_0 dv_x}{c^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} = \frac{1}{\gamma_0^2} \frac{dv_x}{\left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2}$$

$$\Rightarrow a'_x = \frac{a_x}{\gamma_0^3 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^3} . \quad (3.18a)$$

Passando alla seconda delle (3.16) si ha

$$dv'_y = \frac{dv_y}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} + \frac{v_y v_0 dv_x}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2 c^2} = \frac{1}{\gamma_0 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)} \left(dv_y + \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} dv_x \right)$$

$$\Rightarrow a'_y = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_y + a_x \frac{\frac{v_0 v_y}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18b)$$

Analogamente

$$a'_z = \frac{1}{\gamma_0^2 \left(1 - \frac{v_0}{c^2} v_x\right)^2} \left(a_z + a_x \frac{\frac{v_0 v_z}{c^2}}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x} \right) . \quad (3.18c)$$

Se nel sistema O l'accelerazione è nulla ($a_x = a_y = a_z = 0$), lo stesso avviene nel sistema O' ($a'_x = a'_y = a'_z = 0$). Ciò è coerente con l'affermazione iniziale secondo cui, dato un sistema inerziale, con una trasformazione di Lorentz si passa ad un altro sistema inerziale (e ci ricorda che di sistemi inerziali ne esiste un numero infinito). Invece, se in un sistema inerziale si misura un'accelerazione non nulla, in un altro sistema inerziale si trova un valore non nullo diverso, secondo (3.18); non è più valido il risultato $\mathbf{a} = \mathbf{a}'$, garantito dalle trasformazioni galileiane (ad esso si ritorna solo nel caso di piccole velocità, come è facile verificare). Si comprende così perché la legge di Newton $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ non è invariante rispetto ad una trasformazione di Lorentz.

Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Nella meccanica newtoniana si ammette implicitamente che le misure di spazio e di tempo siano invarianti rispetto al sistema di riferimento ovvero che esse abbiano un significato assoluto: se un oggetto misurato in O ha lunghezza L anche O' trova L e un intervallo di tempo Δt misurato in O vale ancora Δt se misurato in O' . Invece un'impostazione corretta del problema, che tenga conto di tutti i fenomeni conosciuti (tra i quali la costanza del valore c della velocità della luce in qualsiasi sistema inerziale), porta alla conclusione che le misure di lunghezza e tempo dipendono dal sistema di riferimento; numericamente l'effetto si può trascurare solo per velocità molto minori di c .

Cominciamo col considerare una sbarretta lunga L' , la quale è in quiete sull'asse x' del sistema O' ; x'_1 e x'_2 sono le coordinate dei suoi estremi. Supponiamo che O' si muova con velocità v_0 rispetto a O e che un osservatore nel sistema O

misuri, nello stesso istante di tempo t , le coordinate x_1 e x_2 degli estremi della sbarretta. Secondo (3.15)

$$x'_1 = \gamma_0 (x_1 - v_0 t) \quad , \quad x'_2 = \gamma_0 (x_2 - v_0 t) \quad ,$$

$$L' = x'_2 - x'_1 = \gamma_0 (x_2 - x_1) = \gamma_0 L \quad , \quad L = \frac{L'}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L' \quad ;$$

la lunghezza L misurata da O della sbarretta in movimento rispetto ad O risulta minore della lunghezza L' misurata da O' , rispetto a cui la sbarretta è in quiete. La sbarretta appare contratta lungo la direzione del moto e l'effetto si chiama *contrazione delle lunghezze*.

Notiamo che se la sbarretta è in quiete in O e in moto rispetto a O' abbiamo dalle (3.17)

$$x_1 = \gamma_0 (x'_1 + v_0 t') \quad , \quad x_2 = \gamma_0 (x'_2 + v_0 t') \quad ,$$

$$x_2 - x_1 = \gamma_0 (x'_2 - x'_1) \quad , \quad L = \frac{L'}{\gamma_0} = \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} L' \quad ;$$

l'effetto è lo stesso, *la misura fatta nel sistema rispetto a cui la sbarretta è in moto è minore della misura fatta nel sistema in cui la sbarretta è in quiete*. Quest'ultima misura si chiama *lunghezza propria* della sbarretta.

La contrazione relativistica non si ha se la sbarretta è disposta lungo l'asse y o l'asse z , ortogonali alla direzione del moto (dato che $y = y'$ e $z = z'$).

Consideriamo adesso un fenomeno che nel sistema O' avviene nella posizione di coordinata x' e dura un tempo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$; nel sistema O si ha

$$t_1 = \gamma_0 \left(t'_1 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad , \quad t_2 = \gamma_0 \left(t'_2 + \frac{v_0}{c^2} x' \right) \quad ,$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \Delta t' = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \quad ;$$

l'intervallo di tempo in O , rispetto a cui O' si muove, appare più lungo, il fenomeno per O dura di più. Di nuovo l'effetto è lo stesso se il fenomeno avviene in O , dove dura Δt , e si calcola cosa misura O' : si trova $\Delta t' = \gamma_0 \Delta t$. Nella situazione descritta *il tempo misurato da un sistema in movimento è sempre maggiore del tempo proprio, misurato in quiete*. Si parla in questo caso di *dilatazione dei tempi*.

La dilatazione dei tempi segue in modo naturale dalla trasformazione di Lorentz. Vogliamo far vedere come la si possa ricavare direttamente dal fatto che la velocità della luce ha lo stesso valore c in sistemi inerziali diversi. Il fenomeno che si considera è l'emissione di un segnale luminoso dall'origine del sistema O ; tale segnale si propaga lungo l'asse y fino a distanza d , qui viene riflesso da uno specchio e torna in O : il tempo di andata è d/c e il tempo totale per tornare in O è $2d/c$. Osserviamo il fenomeno dal sistema O' in moto con velocità v_0 ; ricordando quanto calcolato nell'esempio 3.8, si ha la situazione mostrata nella figura 3.20 (supponendo che nell'istante in cui viene emesso il segnale O e O' coincidano). La distanza d' misurata in O' e la distanza d misurata in O sono legate dalla relazione $d = d' \sin \theta = d' / \gamma_0$, dove abbiamo usato (in modulo) la relazione ricavata nell'esempio 3.8. La velocità della luce è c in entrambi i sistemi e il tempo impiegato dalla

luce, secondo O' , per raggiungere lo specchio e tornare indietro è

$$t' = \frac{2d'}{c} = 2\gamma_0 \frac{d}{c} = \gamma_0 t \quad ;$$

la distanza è maggiore, la velocità è la stessa, il tempo deve essere maggiore. Ritroviamo che la durata di un fenomeno, visto da un sistema in moto, è maggiore della durata propria.

Classicamente, cioè componendo la velocità della luce c con la velocità di trascinamento v_0 secondo la regola galileiana, la velocità della luce in O' sarebbe $\sqrt{c^2 + v_0^2}$, l'angolo θ sarebbe tale che $\operatorname{tg}\theta = c/v_0$ ovvero $\operatorname{sen}\theta = c/\sqrt{c^2 + v_0^2}$, la distanza $d' = d/\operatorname{sen}\theta$ risulterebbe $d\sqrt{c^2 + v_0^2}/c$ e per il tempo si avrebbe

$$t' = \frac{2d'}{\sqrt{c^2 + v_0^2}} = \frac{2d}{c} = t \quad ,$$

eguale al tempo misurato in O .

Anche nel caso della contrazione delle lunghezze si può costruire un esempio analogo in cui si vede esplicitamente che il risultato è conseguenza diretta della costanza del valore c in diversi sistemi inerziali.

Accanto a questi esempi essenzialmente concettuali c'è una classe di fenomeni in cui la dilatazione dei tempi si misura correntemente, *i decadimenti delle particelle subnucleari instabili*. Nel decadimento la particella primaria cessa di esistere e al suo posto compaiono altre particelle; il processo ha un suo tempo caratteristico τ , detto *vita media* della particella che decade, avente questo significato: se ad un certo istante c'è un dato numero N di particelle primarie, dopo τ secondi questo numero si è ridotto a N/e (con $e = 2.71828\dots$), dopo 2τ secondi a N/e^2 e così via. Ovvero, se una particella instabile viene considerata al tempo $t = 0$, la probabilità P che essa sia ancora esistente al tempo t è $P(t) = e^{-t/\tau}$. Tutto ciò è corretto in un sistema di riferimento in cui la particella è in quiete. Con un acceleratore di particelle e attraverso opportune reazioni è possibile produrre artificialmente particelle instabili di un dato tipo con ben determinate velocità, anche assai prossime alla velocità c . Si osserva che esse percorrono spazi che sembrano incompatibili con la loro vita media τ , cioè queste particelle arrivano a distanza notevole dalla sorgente di produzione dopo un tempo tale che la probabilità di sopravvivenza dovrebbe essere praticamente zero; come ordine di grandezza potremmo aspettarci che esse arrivino a distanze di valore $\sim c\tau$, invece le distanze sono molto maggiori. La spiegazione sta nella dilatazione relativistica del tempo. Immaginiamo un sistema O' solidale alla particella: in O' essa è a riposo e la sua vita media vale τ , cioè il fenomeno osservato in un punto x' di O' è il decadimento in quiete della particella, caratterizzato dal tempo τ . Il sistema O' si muove però con velocità vicina a c rispetto al sistema O , per esempio solidale all'acceleratore (il cosiddetto sistema del laboratorio) e nei due sistemi gli intervalli di tempo non sono gli stessi: come abbiamo visto $\Delta t = \gamma_0 \Delta t'$ e quindi nel sistema O la vita media è $\gamma_0 \tau$; la particella in moto vive più a lungo ed è pertanto in grado di coprire distanze di valore $\sim c\gamma_0 \tau$. Qualunque sia la velocità di O' (cioè della particella) rispetto ad O , O' misura sempre τ ; invece O misura una vita media $\gamma_0 \tau$ che è tanto maggiore quanto più la particella è veloce: al crescere della velocità relativa ad O sembra che i fenomeni in O' si svolgano sempre più lentamente.

In effetti è nel campo della cinematica e della dinamica (vedi paragrafo 3.9) delle particelle nucleari e subnucleari, stabili e instabili, che la meccanica relativistica ha trovato solide verifiche, soprattutto attraverso l'uso degli acceleratori di particelle, nei quali queste raggiungono facilmente velocità prossime a c , con notevolissimi effetti relativistici.

Esempio 3.10

Il leptone μ è una particella subnucleare avente vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s. Calcolare la vita media nel laboratorio e la quantità $c\gamma\tau$ per velocità del μ pari a $0.5c$, $0.7c$, $0.9c$, $0.99c$, $0.999c$.

Soluzione

Per le varie velocità calcoliamo $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ e compiliamo la seguente tabella. Teniamo presente che nel sistema in cui il μ è a riposo $c\tau = 660$ m = 0.66 km.

$v = 0.5c$	$\gamma = 1.16$	$\gamma\tau = 2.55 \cdot 10^{-6}$ s	$c\gamma\tau = 0.77$ km
$0.7c$	1.40	$3.08 \cdot 10^{-6}$ s	0.92 km
$0.9c$	2.29	$5.04 \cdot 10^{-6}$ s	1.51 km
$0.99c$	7.09	$15.60 \cdot 10^{-6}$ s	4.68 km
$0.999c$	22.37	$49.21 \cdot 10^{-6}$ s	14.76 km

Vediamo che si tratta di variazioni importanti. L'ultima colonna in particolare ci dà il riscontro quantitativo del fatto che un μ prodotto con notevole velocità può coprire prima di decadere distanze molto maggiori di $c\tau$.

Storicamente i leptoni μ vennero scoperti nel 1937 nella radiazione cosmica; si trovò, rallentandoli fino a portarli alla quiete, che erano particelle instabili con la vita media $\tau = 2.2 \cdot 10^{-6}$ s sopra citata. D'altra parte la loro origine è dovuta al decadimento di altre particelle instabili prodotte nell'urto di protoni cosmici contro i nuclei degli atomi presenti negli strati alti dell'atmosfera (distanti ben più di $c\tau = 660$ m dalla superficie terrestre). I leptoni μ così prodotti hanno notevole velocità; nel sistema del laboratorio la loro vita è più lunga e così essi possono raggiungere la superficie terrestre ed essere rivelati.

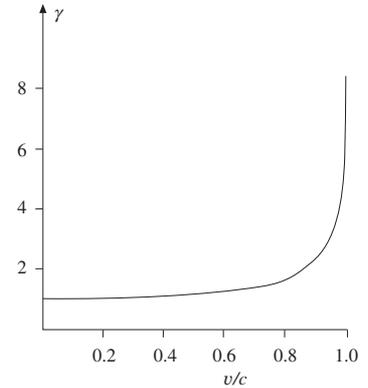


Figura 3.21 (Esempio 3.10)

Simultaneità

La nozione che il tempo dipende dal sistema di riferimento, espressa dalla quarta delle (3.15), comporta anche la revisione del concetto di simultaneità. Ad esempio, due eventi che nel sistema O' sono localizzati nei punti di coordinate x'_1 e x'_2 sono definiti simultanei se avvengono nello stesso istante di tempo t' : i punti sono in quiete nel sistema O' e non ci sono problemi nella misura del tempo. Però O assegna ai due eventi i tempi

$$t_1 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_1 \right), \quad t_2 = \gamma_0 \left(t' + \frac{v_0}{c^2} x'_2 \right),$$

che non sono eguali essendo $x'_1 \neq x'_2$. La differenza vale

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} (x'_2 - x'_1)$$

e concludiamo che due eventi localizzati in punti diversi e simultanei nel sistema O' non sono simultanei nel sistema O .

Anche per questo caso possiamo legare il risultato all'invarianza di c , come mostriamo nell'esempio seguente. Nel sistema O' consideriamo un punto P da cui nello stesso istante vengono inviati due segnali luminosi verso i rivelatori R_1 e R_2 , distanti d da P ; l'arrivo dei segnali ai rivelatori è simultaneo e avviene all'istante $t'_1 = t'_2 = d/c$. Tutto questo apparato si sposta con velocità v_0 rispetto al sistema O , nel quale la luce si propaga sempre con velocità c ; però R_1 va incontro al segnale luminoso emesso da P e R_2 se ne allontana, cioè nel sistema O la luce che va da P a R_1 percorre uno spazio minore di quella che va da P a R_2 e quindi i tempi non possono essere gli stessi, proprio perché c non cambia. In formule

$$PR_1 \quad ct_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{d}{c + v_0}$$

$$PR_2 \quad ct_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{d}{c - v_0} > t_1 \quad .$$

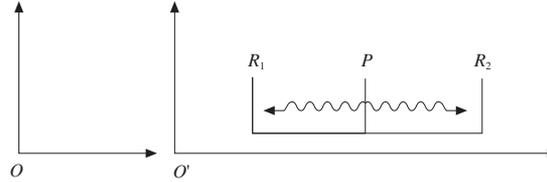


Figura 3.22

Nella visuale galileiana la velocità della luce si compone con la velocità di trascinamento v_0 : in O la luce che va da P a R_1 ha velocità $c - v_0$ e quella che va da P a R_2 ha velocità $c + v_0$, per cui dobbiamo scrivere

$$PR_1 \quad (c - v_0) t_1 = d - v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = d/c$$

$$PR_2 \quad (c + v_0) t_2 = d + v_0 t_2 \Rightarrow t_2 = d/c$$

e la simultaneità viene preservata; però questo procedimento è contrario al risultato sperimentale dell'invarianza di c .

3.9 Quantità di moto ed energia relativistiche

La quantità di moto di un punto materiale di massa m e velocità v si scrive relativisticamente come

$$\mathbf{p} = m\gamma \mathbf{v} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \mathbf{v} \quad . \quad (3.19)$$

Non si ha più la dipendenza diretta dalla velocità della definizione newtoniana $m\mathbf{v}$ ma compare anche γ come fattore moltiplicativo. Si nota di nuovo che la definizione relativistica tende a quella newtoniana per piccole velocità.

La legge del moto si scrive nella forma (2.2)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad , \quad (3.20)$$

cioè conserva formalmente la struttura newtoniana, purché la quantità di moto sia data da (3.19). Ne vedremo più avanti l'applicazione in alcune situazioni che abbiamo già trattato per piccole velocità. Vogliamo però notare subito come l'applicazione di una forza, quando la velocità ha già assunto valori vicini a c , porta sì ad un aumento di p , ma questo aumento non si traduce in un aumento corrispondente di velocità, bensì soprattutto in un aumento del fattore γ .

L'effetto si vede chiaramente mettendo in relazione la crescita di p con quella di v , nel modo seguente. Si differenzia la (3.19) e si divide per $p = m\gamma v$:

$$dp = m d(\gamma v) = m \gamma dv + m v d\gamma \quad ,$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dv}{v} + \frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{dv}{v} \left(1 + \frac{d\gamma/\gamma}{dv/v} \right) \quad .$$

Si differenzia poi l'espressione di γ e si divide per γ :

$$d\gamma = d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} d\left(\frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{v}{c^2} \gamma^3 dv = \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{v} \quad ,$$

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \frac{dv}{v} \quad .$$

Mettendo insieme i risultati

$$\frac{dp}{p} = \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) \frac{dv}{v} = \gamma^2 \frac{dv}{v} \quad ,$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} \quad . \quad (3.21)$$

L'aumento relativo di velocità è $1/\gamma^2$ volte l'aumento relativo di quantità di moto (causato dall'applicazione di una forza). Dato che γ cresce notevolmente al tendere di v a c , l'aumento relativo di velocità è in effetti molto piccolo. Tutto ciò è in accordo col fatto che la velocità di un punto materiale non possa crescere indefinitamente, bensì tenda alla velocità c .

Calcoliamo adesso l'energia cinetica partendo dalla definizione di lavoro e da (3.20):

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot d\mathbf{s} = d\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \quad .$$

Per la variazione infinitesima della quantità di moto relativistica ci serviamo di (3.21) nella forma $d\mathbf{p} = p\gamma^2 d\mathbf{v}/v$:

$$dW = p\gamma^2 \frac{d\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{v} = m\gamma^3 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m\gamma^3 d(v^2) \quad ,$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $d(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = d(v^2) = 2 \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v}$. Quindi $dW = m\gamma^3 v dv$ e confrontando con l'espressione $d\gamma = v\gamma^3 dv/c^2$ trovata sopra concludiamo che

$$dW = mc^2 d\gamma = d(mc^2 \gamma) \quad .$$

Il lavoro per portare una particella dalla quiete ($v = 0, \gamma = 1$) alla velocità v è

$$W = mc^2 \int_1^\gamma d\gamma = mc^2 (\gamma - 1)$$

ed è naturale interpretare questo lavoro come energia cinetica della particella che ha velocità v :

$$E_k = m(\gamma - 1)c^2 \quad . \quad (3.22) \quad \text{Energia cinetica}$$

Per prima cosa verifichiamo che questa espressione, così diversa da $1/2 mv^2$, tenda a tale forma per $v \ll c$. Allo scopo osserviamo che, arrestando lo sviluppo al prim'ordine, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} \quad (x \ll 1)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{v^2}{2c^2} \quad (v^2 \ll c^2)$$

e quindi

$$E_k(v \ll c) = m \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} - 1 \right) c^2 = \frac{1}{2} mv^2 .$$

In secondo luogo notiamo la particolare struttura di (3.22): l'energia cinetica, cioè la forma di energia legata esclusivamente al moto del punto, appare come differenza tra i valori $m\gamma c^2$ e mc^2 , il primo variabile con la velocità e il secondo costante, proporzionale alla massa del punto. Ponendo

Energia totale

$$E = m\gamma c^2 \quad , \quad E_0 = mc^2 \quad , \quad (3.23)$$

la (3.22) si scrive

$$E = E_k + E_0 . \quad (3.24)$$

Il termine E viene chiamato *energia totale* del punto materiale alla velocità v e il termine E_0 *energia a riposo* (in quanto eguale ad E quando $E_k = 0$) ovvero energia di massa del punto materiale, proprio perché proporzionale a m . Queste modifiche al concetto di energia, con l'introduzione dell'energia legata all'esistenza della massa e dell'energia totale, somma di energia cinetica e di energia di massa, sono tra i risultati più importanti della meccanica relativistica.

Notiamo che dal rapporto tra le due formule (3.23) si ha

$$\gamma = \frac{E}{E_0} . \quad (3.25)$$

Rispetto alla definizione cinematica $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, la (3.25) mostra il ruolo dinamico di γ , rapporto tra energia totale ed energia di massa.

Per mezzo della (3.19) possiamo collegare quantità di moto ed energia totale:

$$E = m\gamma c^2 = m\gamma v \frac{c^2}{v} = p \frac{c^2}{v} .$$

In forma vettoriale

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{v} . \quad (3.26)$$

Infine, sempre sfruttando le stesse relazioni si ottiene

$$E^2 - p^2 c^2 = m^2 \gamma^2 c^4 - m^2 \gamma^2 v^2 c^2 = m^2 c^4 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = m^2 c^4$$

$$\Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad ,$$

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} = \sqrt{p^2 c^2 + E_0^2} \quad , \quad (3.27)$$

relazione fondamentale tra energia totale, quantità di moto ed energia a riposo.

Nota. Particelle di massa nulla

Se consideriamo una particella con massa eguale a zero, la relazione (3.27) tra energia totale e quantità di moto diventa

$$E = pc \quad .$$

Sostituendo nella (3.26) si vede che l'eguaglianza comporta $v = c$ e deduciamo questo risultato importante: *una particella con massa nulla si muove con la velocità della luce c ; di conseguenza non esiste un sistema inerziale in cui essa sia a riposo. Sono particelle di massa nulla i fotoni, cioè i quanti di energia elettromagnetica (discussi nel volume secondo).*

Trasformazione di Lorentz per quantità di moto e energia

Le varie relazioni trovate tra energia e quantità di moto riguardano il moto di un punto materiale osservato in un certo sistema di riferimento inerziale: in questo il punto di massa m ha velocità v (dalla quale si può calcolare γ), quantità di moto p ed energia totale E , legate appunto da (3.26) e (3.27). In un diverso sistema inerziale tutte queste grandezze hanno i valori v' , γ' , p' , E' e siamo interessati a trovare quale relazione ci sia tra p , E e p' , E' . Ammettiamo che, in base al principio di relatività, E' e p' siano definiti e legati tra loro come E e p .

Indichiamo schematicamente uno dei possibili procedimenti:

- si scrive $p'_x = m \gamma' v'_x$, $p'_y = m \gamma' v'_y$, $p'_z = m \gamma' v'_z$;
- per v'_x , v'_y , v'_z si utilizzano le (3.17);
- si scrive $v_x = p_x / m\gamma$, $v_y = p_y / m\gamma$, $v_z = p_z / m\gamma$;
- si sostituiscono γ e γ' con E / mc^2 e E' / mc^2 .

Arriviamo così, con un calcolo un po' laborioso, ma facile, alle tre relazioni

$$\frac{p'_x}{E'} = \frac{p_x - \frac{v_0}{c^2} E}{E - v_0 p_x} \quad , \quad \frac{p'_y}{E'} = \frac{p_y}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad \frac{p'_z}{E'} = \frac{p_z}{\gamma_0 (E - v_0 p_x)} \quad .$$

Successivamente nella $E' = m\gamma'c^2$, e precisamente in γ' , si sostituisce a v'^2 l'espressione ricavata usando sempre le (3.17), di nuovo si scrive $v_x = p_x / m\gamma$ e si ricava $E' = \gamma_0 (E - v_0 p_x)$, per cui il risultato finale è

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma_0 \left(p_x - \frac{v_0}{c^2} E \right) \\ p'_y &= p_y \\ p'_z &= p_z \\ E' &= \gamma_0 (E - v_0 p_x) \quad . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Si nota subito che le (3.28) sono eguali alle (3.15), con $p_x, p_y, p_z, E/c$ al posto di x, y, z, t : *le componenti della quantità di moto e l'energia si trasformano allo stesso modo delle coordinate spaziali e del tempo, cioè secondo una trasformazione di Lorentz*, cosa che non succede a velocità e accelerazione. Anche la trasformazione inversa di (3.28), che fa passare da O' a O , si ottiene come visto per (3.17).

Abbiamo già detto che in ciascun sistema inerziale le leggi fisiche hanno la stessa struttura; in particolare sia in O che in O' vale la (3.27):

$$E^2 - c^2 p^2 = E_0^2 \quad , \quad E'^2 - c^2 p'^2 = E_0'^2 \quad .$$

Un semplice calcolo sulle (3.28) mostra che

$$E'^2 - c^2 p'^2 = E'^2 - c^2 (p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) = E'^2 - c^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) = E^2 - c^2 p^2 \quad ,$$

ovvero l'energia a riposo, e quindi la massa, hanno lo stesso valore nei due sistemi O e O' . In realtà così abbiamo solo verificato la consistenza del formalismo, perché nella nostra dimostrazione si è assunto in partenza che la massa fosse la stessa nei due sistemi (ad esempio quando abbiamo scritto $p'_x = m\gamma' v'_x$ o $E' = m\gamma' c^2$). D'altra parte è anche vero che le (3.28) possono essere provate indipendentemente e che da esse discende la costanza del valore della massa in qualsiasi sistema inerziale.

Una verifica analoga sulle (3.15) fa vedere che

$$c^2 t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad .$$

Incontriamo, con questa e con la precedente eguaglianza, una proprietà fondamentale delle trasformazioni di Lorentz. Con le quattro variabili oggetto della trasformazione è possibile costruire una quantità, somigliante al quadrato del modulo di un vettore, che non cambia operando la trasformazione, cioè passando da O ad O' e viceversa. In un caso tale quantità è $c^2 t^2 - r^2$, nell'altro $E^2 - c^2 p^2$. Su questa proprietà ci accontentiamo di richiamare l'attenzione; formalmente essa discende dal fatto che le coordinate spaziali e il tempo possono essere pensate come le coordinate di uno speciale spazio quadridimensionale (lo spazio di Minkowski), in cui le trasformazioni di Lorentz hanno lo stesso ruolo delle rotazioni nello spazio ordinario tridimensionale (sappiamo che le rotazioni conservano la lunghezza dei segmenti, vedi paragrafo 3.7). L'argomento esula dagli scopi di questo libro; esso costituisce la base per la costruzione formale della teoria della relatività ristretta, di cui noi diamo solo qualche nozione.

Esempio 3.11

Nel sistema O' un punto è in quiete. Quanto valgono la sua quantità di moto e la sua energia viste da O ?

Soluzione

In O' $p'_x = p'_y = p'_z = 0$ ed $E' = E_0 = mc^2$. Dato che O' si muove con velocità v_0 rispetto ad O , secondo la solita geometria, usiamo la trasformazione inversa di (3.28):

$$p_x = \gamma_0 \left(p'_x + \frac{v_0}{c^2} E' \right) = \gamma_0 \frac{v_0}{c^2} mc^2 = m\gamma v_0$$

$$p_y = p'_y = 0$$

$$p_z = p'_z = 0$$

$$E = \gamma_0 (E' + v_0 p'_x) = m\gamma_0 c^2 \quad .$$

Giustamente, il punto rispetto ad O si muove con velocità v_0 parallela all'asse x e quindi quantità di moto ed energia hanno le espressioni (3.19) e (3.23). Abbiamo in sostanza verificato nel caso in esame la consistenza della teoria.

Esempio 3.12

Un fotone avente energia E si muove lungo una linea retta che forma l'angolo θ con l'asse x del sistema O . Calcolare nel sistema O' le espressioni di E' e θ' .

Soluzione

Abbiamo visto nella nota di questo paragrafo che il fotone, considerato come particella di massa nulla, ha quantità di moto $p = E/c$. Tale relazione è vera in qualsiasi sistema inerziale in quanto il fotone ha sempre velocità c e quindi massa nulla. Pertanto nel sistema O possiamo scrivere

$$p_x = p \cos\theta = \frac{E}{c} \cos\theta \quad , \quad p_y = p \sin\theta = \frac{E}{c} \sin\theta \quad , \quad p_z = 0$$

e analogamente nel sistema O'

$$p'_x = \frac{E'}{c} \cos\theta' \quad , \quad p'_y = \frac{E'}{c} \sin\theta' \quad , \quad p'_z = 0 \quad .$$

Dalle (3.28)

$$\frac{E'}{c} \cos\theta' = \gamma_0 \left(\frac{E}{c} \cos\theta - \frac{v_0}{c^2} E \right) = \gamma_0 \frac{E}{c} \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)$$

$$\frac{E'}{c} \sin\theta' = \frac{E}{c} \sin\theta$$

$$E' = \gamma_0 \left(E - v_0 \frac{E}{c} \cos\theta \right) = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c} \cos\theta \right) \quad .$$

Dividendo la seconda relazione per la prima si ottiene

$$\operatorname{tg}\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_0 \left(\cos\theta - \frac{v_0}{c} \right)} \quad ,$$

da cui possiamo calcolare l'angolo θ' in funzione di θ e della velocità relativa dei due sistemi; si noti che non c'è dipendenza dall'energia del fotone. In particolare, se $\theta = \pi/2$, $\operatorname{tg}\theta' = -c/\gamma_0 v_0$ in accordo con quanto trovato nell'esempio 3.8.

La relazione tra le energie mostra che l'energia dipende dal sistema di riferimento, pur avendo il fotone la stessa velocità in qualsiasi sistema. Ponendo per semplicità $\theta = 0$, abbiamo

$$E' = \gamma_0 E \left(1 - \frac{v_0}{c} \right) = E \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = E \frac{\sqrt{1 - \frac{v_0}{c}}}{\sqrt{1 + \frac{v_0}{c}}} < E \quad .$$

Se, ad esempio, O è il sistema in cui viene emesso il fotone di energia E , nel sistema O' che si allontana da O si misura un'energia E' inferiore e dalla differenza delle energie si può calcolare la velocità relativa tra i due sistemi (se O' si avvicinasse ad O , esso misurerebbe un'energia superiore; in ogni caso si ha un'informazione sul moto relativo, non su chi si muove e chi è fermo).

Resta il problema di capire da cosa dipenda l'energia di un fotone. Tratteremo questo argomento nel secondo volume e vedremo che un fotone di energia E è associato alla propagazione di un'onda elettromagnetica di frequenza ν (la nozione di propagazione ondulatoria verrà introdotta nel capitolo 9 di questo volume); l'energia del fotone è legata alla frequenza dell'onda dalla relazione $E = h\nu$, dove h è una costante fondamentale, la *costante di Planck*. Da questo punto di vista la relazione precedente si scrive

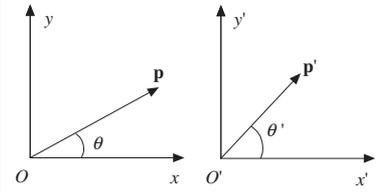


Figura 3.23 (Esempio 3.12)

$$v' = v \frac{1 - \frac{v_0}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}$$

e mostra come varia la frequenza con la velocità relativa dei due sistemi. Il fenomeno si chiama *effetto Doppler* (paragrafo 13.11 del secondo volume). Un'applicazione notissima è la seguente. Supponiamo di misurare sulla terra le frequenze di un tipo di luce e di essere in grado di riconoscere quel tipo di luce quando ci giunge da una galassia; troviamo però che le frequenze sono sistematicamente diverse da quelle misurate sulla terra e dalla differenza determiniamo la velocità della galassia rispetto alla terra. Misure di questo tipo hanno messo in evidenza una diminuzione di frequenza (il cosiddetto spostamento verso il rosso), segno che le galassie si allontanano da noi, e accreditano l'ipotesi dell'universo in espansione.

Forza

La legge del moto nella meccanica relativistica, come nella meccanica newtoniana, è la (3.20), $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$. Questa espressione è valida in qualsiasi sistema inerziale, nel senso che in O e in O' la legge del moto è, rispettivamente

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad , \quad \mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'}$$

In generale $d\mathbf{p}/dt$ e $d\mathbf{p}'/dt'$ sono diverse e quindi *due osservatori inerziali misurano forze diverse*: questa è una differenza sostanziale rispetto alla relatività galileiana.

Dalle leggi di trasformazione già ricavate potremmo risalire a quella valida per le componenti della forza e troveremo espressioni che non sono trasformazioni di Lorentz, come è successo per la velocità e l'accelerazione. Non esplicitiamo però questo calcolo perché non ci servirà per il seguito dell'esposizione.

Vogliamo invece dimostrare come da $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ non si possa dedurre $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Allo scopo sviluppiamo (3.20), inserendo l'espressione relativistica (3.19) della quantità di moto; in questa la massa è costante, però γ varia al variare del modulo della velocità e pertanto la forza è eguale alla somma di due termini,

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\gamma \frac{d\mathbf{v}}{dt} + m\mathbf{v} \frac{d\gamma}{dt} \quad , \quad (3.29)$$

il primo parallelo all'accelerazione $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ e il secondo parallelo a \mathbf{v} ; poiché \mathbf{v} e \mathbf{a} non sono di norma parallele, non sussiste più il parallelismo tra \mathbf{F} e \mathbf{a} .

Questo è il caso più generale. Limitiamoci ora a due casi particolari, in cui per costruzione \mathbf{F} e \mathbf{a} sono parallele e verifichiamo che non si ha comunque $F = ma$.

Per primo consideriamo un moto circolare uniforme. La velocità cambia solo di direzione, $d\gamma/dt = 0$ anche se γ può avere un valore elevato (se v è vicina a c), e la (3.29) si riduce a

$$\mathbf{F} = m\gamma\mathbf{a} \quad , \quad F = m\gamma a_N = m\gamma \frac{v^2}{R} = \frac{pv}{R} \quad ,$$

essendo R il raggio della circonferenza. La dipendenza della forza centripeta F da γv^2 invece che solo da v^2 come vorrebbe la meccanica newtoniana è stata verificata sin dagli inizi di questo secolo, confermando la correttezza della formulazione rela-

tivistica. Negli acceleratori circolari, in cui le particelle descrivono orbite composte da archi di circonferenza, la forza centripeta è ottenuta per mezzo di un opportuno campo magnetico (forza di Lorentz, capitolo 7 del secondo volume) e il calcolo del suo valore si fa appunto servendosi della formula relativistica. Un altro fatto interessante verificato è che la dilatazione $\gamma\tau$ della vita media di una particella instabile in moto con velocità v si ha pure se il moto avviene lungo una circonferenza.

Passiamo adesso ad un moto rettilineo, con forza, velocità, accelerazione parallele alla direzione del moto. Supponiamo che la forza agente sia costante e che inizialmente il punto sia in quiete. Per calcolare $d\gamma/dt$ nella (3.29) utilizziamo l'espressione di dy che abbiamo ricavato per arrivare alla (3.21), ovvero

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{v}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} \quad ;$$

l'equazione del moto è quindi

$$F = m\gamma \frac{dv}{dt} + m \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma \frac{dv}{dt} \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \gamma^2 \right) = m\gamma^3 \frac{dv}{dt} = m\gamma^3 a \quad .$$

Notiamo subito che il moto non è uniformemente accelerato: γ varia nel tempo e a non può essere costante, dato che $m\gamma^3 a$ è costante. Calcoliamo la velocità in questo modo:

$$\frac{F}{m} dt = \gamma^3 dv = d(\gamma v) \quad ,$$

dove l'ultimo passaggio segue da

$$d(\gamma v) = \gamma dv + v d\gamma = \gamma dv + \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 dv = \gamma^3 dv \quad .$$

Si integra e si ottiene

$$\gamma v = \frac{F}{m} t \quad , \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{F}{m} t \quad , \quad v = \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}}} \quad .$$

La velocità non cresce linearmente col tempo e tende asintoticamente a c . Solo fino a quando è soddisfatta la condizione

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \gg 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \ll \frac{m^2 c^2}{F^2}$$

si può descrivere $v = Ft/m$, come nella meccanica newtoniana. All'opposto, per velocità prossima a c , cioè quando

$$\frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 \gg \frac{m^2 c^2}{F^2} \quad ,$$

ci possiamo servire dell'approssimazione $1/\sqrt{1+x} = \sqrt{1-x}$ e abbiamo

$$v = c \sqrt{1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2}} \quad ,$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{Ft}{mc} \quad , \quad p = m\gamma v = Ft \quad 1 - \frac{m^2 c^2}{F^2 t^2} \quad .$$

La verifica sperimentale di queste formule si effettua accelerando linearmente particelle come gli elettroni e i protoni.

Confrontando i due esempi emerge che il rapporto F/a vale in un caso $m\gamma$ e nell'altro $m\gamma^3$: questo rapporto, che nella meccanica newtoniana vale m e indica l'inerzia del punto materiale, nella meccanica relativistica dipende dal tipo di moto; la nozione di inerzia cioè non è più legata soltanto alla massa.

Un'ultima avvertenza sulle forze riguarda il principio di azione e reazione. La formulazione data nel paragrafo 2.2 presuppone un'interazione istantanea tra i due corpi, ma ciò è in contrasto con uno dei fondamenti della teoria della relatività, secondo cui qualsiasi segnale fisico ha velocità finita, che non può superare quella della luce. Non approfondiamo l'argomento; notiamo però ancora una volta che la teoria della relatività comporta una revisione concettuale di tutte le basi della meccanica newtoniana. Nel caso specifico è vera la solita approssimazione, e cioè che nei problemi meccanici ordinari ci si può correttamente servire del principio di azione e reazione, però già passando a fenomeni elettromagnetici macroscopici con emissione e assorbimento di onde elettromagnetiche (che si propagano con la velocità della luce) è necessario abbandonare il semplice meccanismo dell'azione e reazione.

Energia e massa

Abbiamo visto che solo per il fatto di avere la massa m una particella possiede l'energia $E_0 = mc^2$, detta energia di massa o energia a riposo. Il nuovo concetto, introdotto da Einstein, ha validità generale; tuttavia esso non ha interesse pratico nella meccanica dei corpi macroscopici, mentre gioca un ruolo fondamentale nelle interazioni tra particelle nucleari o subnucleari.

Anticipando una situazione che discuteremo nel capitolo quarto, consideriamo due tali particelle che interagiscono; nel caso più generale lo stato finale è diverso dallo stato iniziale, nel senso che come risultato della reazione si possono avere particelle diverse da quelle iniziali. Si è verificato con estrema precisione che in questi fenomeni l'*energia totale resta costante*:

$$E_{\text{in}} = (\sum E_k)_{\text{in}} + (\sum E_0)_{\text{in}} = E_{\text{fin}} = (\sum E_k)_{\text{fin}} + (\sum E_0)_{\text{fin}} \quad ,$$

dove le sommatorie sono estese alle particelle che partecipano all'interazione. Definendo

$$\Delta E_k = (\sum E_k)_{\text{fin}} - (\sum E_k)_{\text{in}} \quad , \quad \Delta E_0 = (\sum E_0)_{\text{fin}} - (\sum E_0)_{\text{in}} \quad ,$$

deve essere

$$\Delta E = \Delta E_k + \Delta E_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = -\Delta E_0 = -(\Delta m) c^2 \quad .$$

In queste reazioni può avvenire che la somma delle masse delle particelle che compongono lo stato finale sia diversa dalla somma delle masse delle particelle presenti all'inizio, cioè *la massa totale non si conserva*, ma varia di Δm . Questa variazione, moltiplicata per c^2 , compare nel bilancio dell'energia e deve essere compensata da una variazione opposta di energia cinetica. Abbiamo pertanto due casi possibili:

- a) $\Delta m > 0$, massa finale maggiore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k < 0$, nello stato finale c'è meno energia cinetica, una parte dell'energia cinetica iniziale si è trasformata in energia di massa;

b) $\Delta m < 0$, massa finale minore di quella iniziale $\Rightarrow \Delta E_k > 0$, nello stato finale c'è più energia cinetica, una parte dell'energia di massa iniziale si è trasformata in energia cinetica.

Questa nozione della non immutabilità della massa e della possibilità di *conversione tra massa ed energia* è una delle più importanti introdotte dalla teoria della relatività.

Dalle trasformazioni di massa in energia nelle reazioni di fusione tra nuclei degli isotopi dell'idrogeno si spera di ottenere una fonte di energia praticamente inesauribile. L'esempio più semplice è costituito dalla fusione di due nuclei di deuterio, detti deutoni, ciascuno formato da un protone e da un neutrone, che danno luogo a un *nucleo di elio 3* e ad un neutrone; l'elio 3 è un isotopo dell'elio con nucleo composto da due protoni e da un neutrone. La somma delle masse della particelle finali è minore di quella dei due nuclei di deuterio e la differenza si ritrova sotto forma di energia cinetica dell'elio 3 e del neutrone; è proprio l'energia cinetica del neutrone che verrebbe successivamente assorbita e trasformata in altre forme di energia utilizzabile. Si osservi che la reazione non avviene spontaneamente perché i due deutoni sono entrambi carichi positivamente e si respingono; essi devono perciò possedere una certa energia che permetta di vincere la repulsione elettrica. La via sperimentale attualmente più seguita è di portare deuterio gassoso a temperature molto elevate, il che corrisponde a energie cinetiche elevate come vedremo nel capitolo sulle proprietà dei gas, con lo scopo di favorire il processo di fusione. Si parla di *fusione termonucleare controllata* e al momento attuale alcuni dei reattori sperimentali operanti nel mondo non sono lontani dalla parità nel bilancio energetico, cioè dall'eguaglianza tra energia spesa complessivamente per realizzare le fusioni e energia ricavata dalle fusioni. Però la via da percorrere per realizzare un'operazione continua e affidabile sembra ancora molto lunga.

Sempre a reazioni di fusione si attribuisce la fonte di energia di alcune categorie di stelle, tra cui il Sole.

Un altro esempio interessante è la formazione di uno stato legato a partire da due particelle singole, per esempio un protone e un neutrone che danno un deutone (nucleo del deuterio). La massa del deutone è inferiore alla somma delle masse del protone e del neutrone, però il sistema è legato con una certa energia. Si misura che l'energia di legame vale proprio $(\Delta m) c^2$: la massa scomparsa si è tramutata in energia. Rompendo il sistema si deve spendere energia e si recupera massa.

Infine vogliamo ricordare un processo che ha un'applicazione in campo medico. Alcune sostanze radioattive emettono positroni, particelle aventi la stessa massa dell'elettrone e carica opposta. Quando un positrone così prodotto attraversa la materia avviene un processo di annichilazione: il positrone interagisce con un elettrone, entrambi scompaiono e vengono emessi due fotoni, aventi energia pari all'energia di massa delle particelle scomparse. In prima approssimazione possiamo supporre che l'energia cinetica iniziale sia trascurabile rispetto all'energia di massa e fare questa schematizzazione:

- in un punto si ha l'annichilazione, con le particelle praticamente in quiete, e viene resa disponibile l'energia $2mc^2$;
- da quel punto escono due fotoni, aventi la stessa direzione di moto e verso opposto, ciascuno di energia mc^2 .

Si ha trasformazione integrale di massa in energia (ricordiamo che i fotoni hanno massa nulla).

È noto in medicina che, iniettando nel corpo umano alcuni particolari composti chimici, questi si accumulano in organi o tessuti specifici, come il muscolo cardiaco o tessuti con cellule tumorali. Sostituendo in una piccola percentuale di molecole di tali composti certi atomi con loro isotopi radioattivi emettitori di positroni (ad esempio C^{11} al posto di C^{12}), con il che non si alterano le proprietà di assorbimento da parte dell'organismo, si ottiene una concentrazione di emissione nelle zone inte-

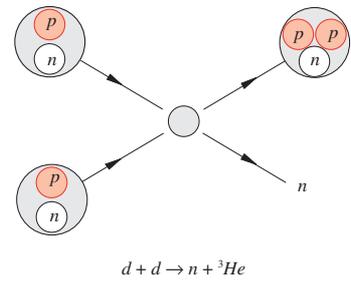


Figura 3.24

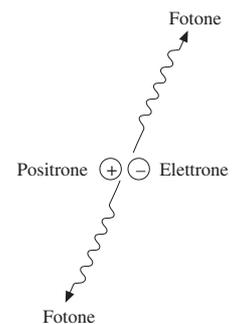


Figura 3.25

ressate; i positroni annichilano subito e si produce una coppia di fotoni. Siccome l'emissione non ha una direzione preferenziale e gli eventi di annichilazione sono tanti, nel complesso si ha una distribuzione isotropa di fotoni, che ha origine nella zona da studiare. Si rivelano con opportuni strumenti la direzione e l'energia di ciascun fotone e si riesce a costruire un'immagine della zona di emissione, mettendone in evidenza la forma. Questo mezzo diagnostico si chiama PET (positron emission tomography ovvero tomografia ad emissione di positroni) e trova applicazione principalmente in neurologia, cardiologia e oncologia.

Commento conclusivo

Ripercorriamo rapidamente gli argomenti di teoria della relatività ristretta che abbiamo esposto per trarne alcune conclusioni riassuntive.

La formulazione relativistica fornisce la legge del moto e la definizione di grandezze fondamentali come quantità di moto ed energia per un punto materiale in moto con velocità qualsiasi, però sempre inferiore alla velocità c della luce nel vuoto, limite asintotico non raggiungibile per particelle dotate di massa.

Tutte le leggi fisiche devono avere la stessa struttura in qualsiasi sistema inerziale (principio di relatività); il collegamento tra le misure di spazio e tempo effettuate in due sistemi diversi è dato dalla trasformazione di Lorentz. In particolare gli intervalli spaziali e temporali dipendono dal sistema di riferimento.

Pur avendo concettualmente validità generale, le nuove formule trovano applicazione pratica solo nel moto di particelle a livello atomico, nucleare e subnucleare, le uniche che possano raggiungere velocità prossime a quelle della luce in fenomeni naturali o procurati in laboratorio e per le quali sono misurabili gli effetti di trasformazioni tra energia e massa. È per questa ragione che i risultati trovati appaiono così lontani dalla nostra esperienza comune: noi non siamo circondati da corpi che si muovono con velocità vicine a c e non siamo in grado di comunicare tali velocità ad oggetti macroscopici, non abbiamo cioè sensibilità per questo tipo di fenomeni.

In questo contesto, come abbiamo già detto all'inizio del paragrafo 3.8, la meccanica newtoniana è una teoria approssimata, a cui si riduce la meccanica relativistica quando v è trascurabile rispetto a c e γ vale 1 a tutti gli effetti. Delimitandone così il campo di azione, in esso la meccanica newtoniana è estremamente accurata e resta la teoria fondamentale, nella quale trovano spiegazione i fenomeni meccanici che coinvolgono corpi macroscopici.

Nella parte restante di questo volume avremo ancora due richiami specifici di relatività: nel capitolo quarto quando parleremo di urti tra punti e nel capitolo quinto dove trattiamo la legge di gravitazione.

P. Mazzoldi • M. Nigro • C. Voci

Fisica

Volume I

Accedi all'ebook e ai contenuti digitali > Espandi le tue risorse > con un libro che **non pesa** e si **adatta** alle dimensioni del tuo **lettore**



All'interno del volume il **codice personale** e le istruzioni per accedere alla versione **ebook** del testo e agli ulteriori servizi. L'accesso alle risorse digitali è **gratuito** ma limitato a **18 mesi dalla attivazione del servizio**.

